

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

اللَّهُمَّ صَلِّ عَلَى مُحَمَّدٍ وَآلِ مُحَمَّدٍ وَعَجِّلْ فَرَجَهُمْ

## حسابان (۲)

رشته ریاضی و فیزیک

راهنمای معلم

پایه دوازدهم

دوره دوم متوسطه

دانلود سوالات آزمون

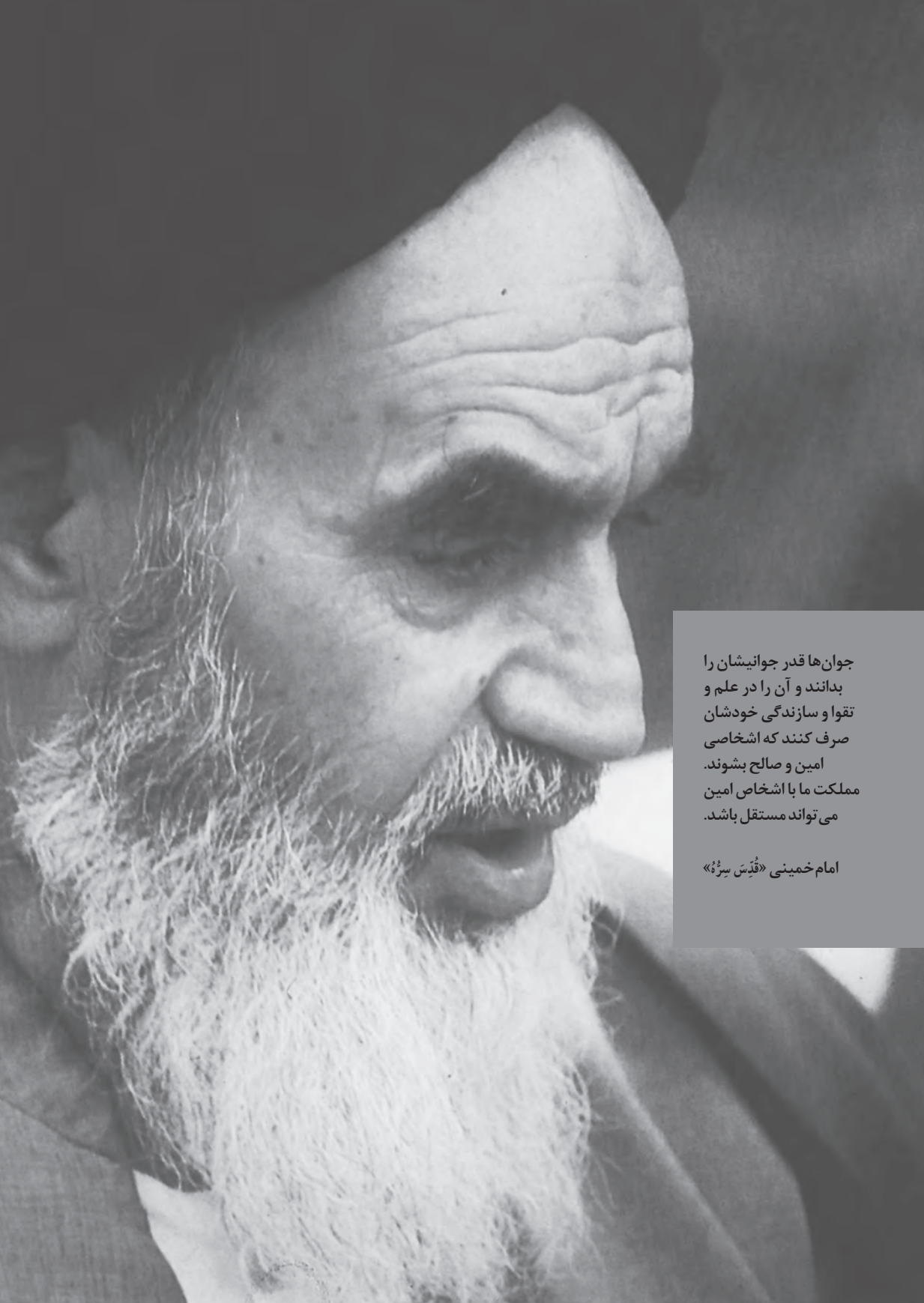
راهنمای کامل آزمون



## وزارت آموزش و پرورش

### سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

- نام کتاب: راهنمای معلم حسابان (۲) - پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه - ۱۱۳۳۸۱
- پدیدآورنده: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
- مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری
- شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف: سیدمحمد رضا احمدی، حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، محمدحسن بیژن‌زاده، خسرو داودی، زهرا رحیمی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمد رضا سید صالحی، میرشهرام صدر، اکرم قابل‌رحمت، طاهر قاسمی هنری و عادل محمدپور (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
- مدیریت آماده‌سازی هنری: سعید حق‌جو، محمود داورزنی، ابراهیم ریحانی، محمد رضا سید صالحی، محمد تقی طاهری تنجانی، مرتضی علیشاهی، مجتبی قربانی، آناهیتا کمیجانی و هادی مین‌باشیان (اعضای گروه تألیف)
- شناسه افزوده آماده‌سازی: اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
- نشانی سازمان: احمد رضا امینی (مدیر امور فنی و چاپ) - جواد صفری (مدیر هنری) - شهرزاد قنبری (صفحه‌آرا) - مریم دهقان‌زاده (رسام) - فاطمه باقری‌مهر، سیدکیوان حسینی، نوشین معصوم‌دوست، سپیده ملک‌ایزدی و حمید ثابت کلاچاهی (امور آماده‌سازی)
- ناشر: تهران: خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)  
تلفن: ۸۸۸۳۱۱۶۱-۹، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کدپستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹  
وبگاه: www.irtextbook.ir و www.chap.sch.ir
- چاپخانه: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران تهران - ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (دارویش) تلفن: ۴۴۹۸۵۱۶۱-۵، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۳۷۵۱۵-۱۳۹
- سال انتشار و نوبت چاپ: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»  
چاپ اول ۱۳۹۸



جوان‌ها قدر جوانیشان را  
بدانند و آن را در علم و  
تقوا و سازندگی خودشان  
صرف کنند که اشخاصی  
امین و صالح بشوند.  
مملکت ما با اشخاص امین  
می‌تواند مستقل باشد.

امام خمینی «قُدَسِ سرُّه»

کلیه حقوق مادی و معنوی این کتاب متعلق به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش است و هرگونه استفاده از کتاب و اجزای آن به صورت چاپی و الکترونیکی و ارائه در پایگاه‌های مجازی، نمایش، اقتباس، تلخیص، تبدیل، ترجمه، عکس برداری، نقاشی، تهیه فیلم و تکثیر به هر شکل و نوع، بدون کسب مجوز از این سازمان ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

# فهرست

## فصل ۱ : تابع

- درس ۱ : تبدیل نمودار تابع ..... ۶
- درس ۲ : تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش پذیری و تقسیم ..... ۱۰

## فصل ۲ : مثلثات

- درس ۱ : تناوب و تنازانت ..... ۱۴
- درس ۲ : معادلات مثلثاتی ..... ۲۵

## فصل ۳ : حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت

- درس ۱ : حدهای نامتناهی ..... ۳۲
- درس ۲ : حد در بی نهایت ..... ۴۱

## فصل ۴ : مشتق

- درس ۱ : آشنایی با مفهوم مشتق ..... ۶۳
- درس ۲ : مشتق پذیری و پیوستگی ..... ۷۴
- درس ۳ : آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر ..... ۹۱

## فصل ۵ : کاربردهای مشتق

- درس ۱ : اکسترم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی ..... ۱۱۲
- درس ۲ : جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن ..... ۱۱۴
- درس ۳ : رسم نمودار توابع ..... ۱۱۵
- منابع ..... ۱۳۲

ساختار کتاب درسی حسابان (۲) براساس سه محور اساسی فعالیت، کار در کلاس و تمرین طراحی شده است. فعالیت‌ها و موقعیت‌هایی برای یادگیری و ارائه مفاهیم ریاضی فراهم می‌کنند و مستلزم مشارکت جدی دانش‌آموزان هستند. معلم در این میان نقش مهم برای راهنمایی و هدایت کلی فعالیت‌ها برعهده دارد. با توجه به اینکه کتاب برای دانش‌آموزان سطح متوسط طراحی شده است، با در نظر گرفتن شرایط مختلف، امکان غنی‌سازی فعالیت‌ها و یا ساده‌سازی آنها توسط معلم وجود دارد. راهنمای حاضر براساس آن تنظیم شده است که کتاب درسی محور اصلی در فرایند آموزش باشد. در همین راستا توجه به انجام فعالیت‌ها در کلاس درس و ایجاد فضای بحث و گفت‌وگو و دادن مجال به دانش‌آموز برای کشف مفاهیم به‌طور جدی توصیه می‌شود.

برای تصویر عنوانی هر فصل اطلاعاتی مناسب و مرتبط با آن در کتاب راهنما آمده است. اهداف هر فصل و اهداف هر درس در کتاب حاضر توضیح داده شده است. همچنین در روش تدریس ارائه شده برای هر درس، نحوه اجرای هر فعالیت و چالش‌های پیش‌رو، پیشنهادهایی برای غنی‌سازی هر فعالیت، بدفهمی‌های احتمالی دانش‌آموزان در آن فعالیت و نیز توصیه‌هایی برای ارزشیابی نیز ارائه شده است. علاوه بر این در مورد پاسخ بیشتر فعالیت‌ها و تمرینات، راهنمایی به‌عمل آمده است. در کنار این بحث‌هایی نیز به‌عنوان دانستنی‌هایی برای معلم و همچنین نمونه سؤال‌هایی برای ارزشیابی ارائه شده است.

زمان کلاس درس نباید به مباحثی خارج از اهداف کتاب درسی اختصاص یابد. همچنین نباید آزمون‌های مختلف خارج از مدرسه مبنای آموزش مفاهیم در کلاس درس باشند، بلکه این کتاب درسی است که سطح و سبک آزمون‌ها را مشخص می‌کند. در بسیاری از موارد درباره یک مفهوم، حدود و ثغوری در کتاب مشخص شده است. رعایت این حد و مرزها، در ارزشیابی‌ها و آزمون‌های رسمی الزامی است. روند کتاب نشان می‌دهد که حتی ارزشیابی باید در خدمت آموزش باشد. ارزشیابی باید براساس اهداف کتاب باشد و نه موضوعاتی که سال‌ها به‌صورت سنتی ارائه شده‌اند.

ارتباط بین ریاضیات مدرسه‌ای و محیط پیرامون و کاربردهای آن در زندگی واقعی، که به وضوح در اسناد بالادستی مورد تأکید قرار گرفته است، به‌صورت تدریجی خود را در کتاب‌های درسی نشان می‌دهد. تلاش برای برقراری این ارتباط در تصاویر کتاب نیز قابل مشاهده است که این موضوع باید مدنظر معلمان و دانش‌آموزان عزیز قرار گیرد.

اگر مهم‌ترین هدف آموزش ریاضی را پرورش تفکر ریاضی بدانیم، دیگر استفاده افراطی از فرمول‌ها، الگوریتم‌ها، قواعد و دستورها بدون آگاهی از چگونگی و چرایی عملکرد آنها، جایگاهی در آموزش ریاضی مدرسه‌ای نخواهد داشت. فرصت حضور دانش‌آموز در کلاس درسی را نباید به سادگی از دست داد. فرایندهایی مانند استدلال، تعمیم، حل مسئله، طرح مسئله و موضوعاتی نظیر مسائل باز پاسخ، بازنمایی‌های چندگانه و گفتمان ریاضی نقش مهمی در پرورش تفکر ریاضی دانش‌آموزان دارد.

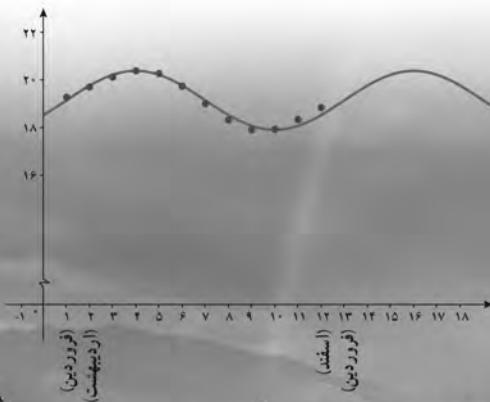
# تابع



## فصل

۱ تبدیل نمودار توابع

۲ تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش پذیری و تقسیم



### پل طبیعت (تهران)

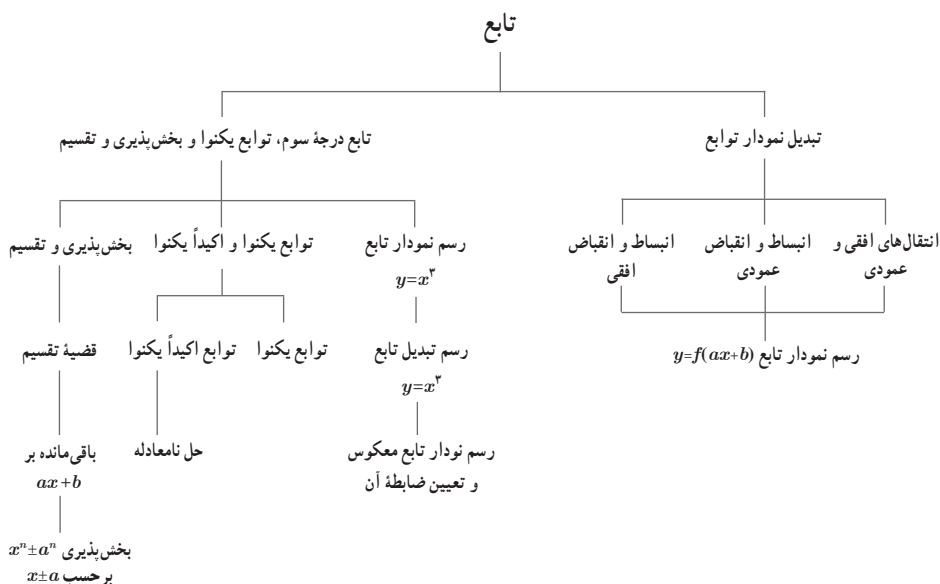
بسیاری از وقایع طبیعی به کمک توابع، مدل سازی می شوند. تبدیل نمودار تابع  $y = \sin x$  به صورت  $y = 1/24 \sin(\frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{6}) + 19/14$ ، مدل ریاضی زمان های غروب آفتاب در ابتدای هر ماه شهر تهران است که نمودار آن در بالا رسم شده است.

## تابع

### اهداف کلی فصل ۱

فصل اول با عنوان «تابع» شامل دو درس است. در درس اول، تبدیل نمودار توابع در شکل‌های مختلف خود که انتقال‌های افقی و عمودی و همچنین انبساط یا انقباض عمودی و افقی است، به‌طور یکجا بررسی می‌شود. در درس دوم، ابتدا نمودار تابع  $y = x^2$  به همراه تبدیل‌های مختلف آن آمده است و سپس تعریف توابع یکنوا به همراه درک شهودی آنها ذکر شده است. در همین قسمت به حل نامعادلات شامل توابع اکیداً یکنوا پرداخته شده است. در قسمت آخر این درس نیز تقسیم چندجمله‌ای‌ها بر یکدیگر بررسی شده است. هدف از این بخش، چگونگی تجزیه  $x^n - a^n$  یا  $x^n + a^n$  بر حسب  $x - a$  یا  $x + a$ ، برای  $n$ های زوج و فرد است.

### نقشه مفهومی





## تصویر عنوانی

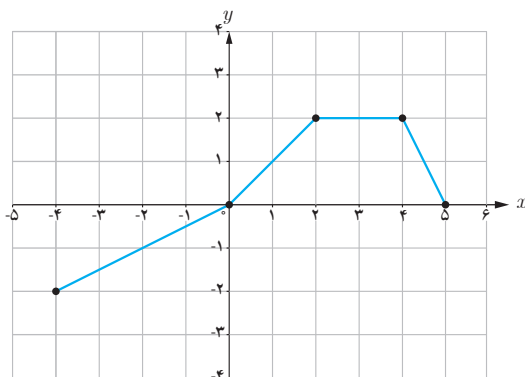
زمان‌های طلوع یا غروب خورشید با توابعی به شکل  $y = a \sin[\omega(x - b)] + c$  مدل‌سازی می‌شوند که در آن همهٔ تبدیل‌های مختلف روی تابع  $y = \sin x$  انجام شده است. به‌عنوان یک نمونه، زمان‌های غروب خورشید در شهر تهران و در ابتدای هر ماه به‌صورت  $y = 1/24 \sin(\frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{6}) + 19/14$  مدل شده است. نمودار این تابع به همراه زمان‌های غروب خورشید نیز در یک نمودار رسم شده است.

## سؤالات ارزشیابی فصل ۱

۱ نمودار تابع  $f$  در شکل زیر رسم شده است. نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید.

الف)  $y = 2f(x - 2) + 1$

ب)  $y = -f(2x + 1)$



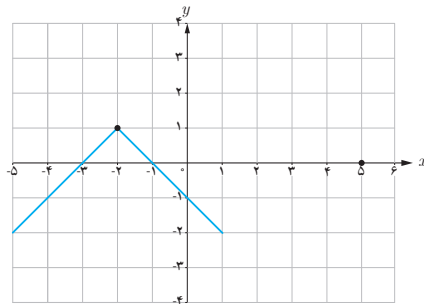
۲ دامنه و برد تابع  $f$ ، بازه‌های  $D_f = [-2, +\infty)$  و  $R_f = [-3, 1]$  هستند. دامنه و برد توابع زیر را تعیین کنید.

الف)  $y = -f(x) + 2$

ب)  $y = f(-2x + 3)$

۳ نمودار تابع  $y = 2\sin\frac{x}{3} - 1$  را به کمک نمودار تابع  $y = \sin x$  رسم کنید.

۴ نمودار زیر از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع  $y = |x|$  به دست آمده است. ضابطه این تابع را مشخص کنید.



۵ تابع  $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$  را در نظر بگیرید.

الف) نمودار این تابع را به کمک نمودار  $y = x^2$  رسم کنید.

ب) نمودار  $f^{-1}$  را رسم کرده و ضابطه آن را تعیین کنید.

۶ در هر مورد، نمودار یک تابع را رسم کنید.

الف) تابعی که در فاصله  $[-\infty, 2]$  صعودی و در فاصله  $[2, +\infty)$  اکیداً صعودی باشد.

ب) تابعی که در فاصله  $(-\infty, 0)$  و  $[0, +\infty)$  اکیداً صعودی باشد ولی در بازه  $(-\infty, +\infty)$  اکیداً صعودی نباشد.

۷ اگر  $f$  و  $g$  در یک فاصله اکیداً نزولی باشند، نشان دهید که تابع  $f+g$  نیز در این فاصله اکیداً نزولی است.

۸ اگر  $f$  و  $g$  در یک فاصله به ترتیب اکیداً صعودی و اکیداً نزولی باشند، تابع  $f-g$  در این فاصله چه وضعیتی دارد؟

۹ اگر باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای  $kx^2 - 2x + 1$  بر  $x + 1$  برابر با  $-2$  باشد،  $k$  را به دست آورید.

۱۰ مقادیر  $a$  و  $b$  را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای  $ax^2 - x^2 + 2bx - 1$  بر  $x + 3$  بخش پذیر و بر  $x - 2$  باقی مانده ۳ داشته باشد.

۱۱ نامعادلات زیر را حل کنید.

الف)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} \leq \frac{1}{8}$

ب)  $2^{-x+1} \geq 4^{2x-1}$

پ)  $\log_2(2x-1) \leq \log_2(-x+1)$

ت)  $\log_{\frac{1}{2}}(x+2) \leq 4$

۱۲ هریک از چندجمله‌ای‌های زیر را بر حسب عامل‌های خواسته شده، تجزیه کنید.

الف)  $x^8 - 1$  با عامل  $x - 1$

ب)  $x^6 - 64$  با عامل  $x + 2$

پ)  $x^5 + 32a^5$  با عامل  $x + 2a$

۱۳  $x^3 - 1$  بر حسب چه عبارت‌هایی در زیر تجزیه می‌شود؟

الف)  $x - 1$

ب)  $x + 1$

پ)  $x^2 - 1$

ت)  $x^2 + 1$

# تبدیل نمودار توابع



## درس

### اهداف درس

- ۱ توانایی رسم توابع به شکل  $y=af(bx+c)+d$  به کمک نمودار  $y=f(x)$ .
- ۲ محاسبه دامنه و برد تابع  $y=af(bx+c)+d$  به کمک دامنه و برد تابع  $f$ .
- ۳ آشنایی با قرینه‌یابی نسبت به محورهای مختلف.
- ۴ تعیین ضابطه یک نمودار که تبدیل به یک تابع شناخته شده است.

### روش تدریس

از سال دهم، دانش آموز با رسم بعضی از توابع و انتقال‌های افقی و عمودی آنها آشنا شده‌اند. در ابتدای این درس، این مفاهیم به همراه استدلال‌های مربوطه آمده است.

۱ اگر  $(x_0, y_0)$  یک نقطه از نمودار تابع  $y=f(x)$  باشد و تابع  $g$  به صورت  $g(x)=f(x)+k$  باشد، سپس  $(x_0, y_0+k)$  یک نقطه از نمودار تابع  $g$  خواهد بود. بنابراین برای  $k>0$ ، نقاط نمودار  $f$  به اندازه  $k$  واحد به بالا و اگر  $k<0$ ، این نقاط به پایین انتقال می‌یابند تا نمودار  $g$  مشخص شود.

۲ اگر  $(x_0, y_0)$  یک نقطه از نمودار تابع  $y=f(x)$  باشد و تابع  $g$  به صورت  $g(x)=f(x+k)$  باشد، سپس  $(x_0-k, y_0)$  یک نقطه از نمودار  $g$  خواهد بود. بنابراین برای  $k>0$ ، نقاط نمودار  $f$  به اندازه  $k$  واحد به چپ و اگر  $k<0$ ، این نقاط به راست انتقال می‌یابند تا نمودار  $g$  رسم شود.

برای تفهیم این دو مطلب، در مثال‌های مربوطه، دامنه و برد  $f$  را محدود کنید تا تغییرات دامنه و برد در تابع  $g$  مشاهده شود. کار در کلاس صفحه ۴ برای این موضوع آورده شده است. می‌توان بعد از این

کار در کلاس، جمع بندی به صورت زیر انجام داد.

اگر دامنه و برد تابع  $f$  به صورت  $D_f=[a,b]$  و  $R_f=[c,d]$  باشد، سپس :

الف) دامنه و برد تابع  $g(x)=f(x)+k$  عبارت است از :  $D_g=[a,b]$  و  $R_g=[c+k,d+k]$ .

ب) دامنه و برد تابع  $h(x)=f(x+k)$  عبارت است از :  $D_h=[a-k,b-k]$  و  $R_h=[c,d]$ .

در مثال های بعدی می توان دامنه و برد  $f$  را بازه هایی انتخاب کرد که از یک یا دو طرف بی کران باشند. از شماره (۲) کار در کلاس صفحه ۴ می توان برای این منظور استفاده کرد.

یک بخش مهم از مثال های دیگر، رسم توابع به شکل  $y=f(x+k)+l$  است که نمودار  $f$  داده شده است. مثال صفحه ۵، برای این منظور داده شده است.

انبساط و انقباض عمودی نمودار  $y=f(x)$  که در نمودار  $g(x)=kf(x)$  ( $k>0$ ) به وجود می آید، مشابه رویه ای است که در انتقال ها آمده است، در صفحه ۶ مشاهده می شود. انجام فعالیت این صفحه در رسم نمودارهای  $y=\frac{1}{3}\sin x$  و  $y=3\sin x$  و مقایسه نمودار آنها با  $y=\sin x$ ، تفاوت آنها را به خوبی نشان می دهد. استدلال مربوط به این مطلب نیز در همین صفحه آمده است. اگر  $k<0$ ، نمودار تابع  $g$ ، قرینه تابع  $f$  نسبت به محور  $x$  ها است، بنابراین همان طور که در صفحه ۷ آمده است، نمودار تابع  $g$  فقط برای  $k>1$  و  $0<k<1$  بحث شده است. در کار در کلاس صفحه ۷، ۳ موضوع اشاره شده است.

۱ تعیین دامنه و برد تابع  $g(x)=kf(x)$  از روی دامنه و برد تابع  $f$ .

اگر  $D_f=[a,b]$  و  $R_f=[c,d]$ ، سپس :

$$k > 0 \Rightarrow \begin{cases} D_g = [a, b] \\ R_g = [kc, kd] \end{cases}, \quad k < 0 \Rightarrow \begin{cases} D_g = [a, b] \\ R_g = [kd, kc] \end{cases}$$

۲ رسم چند تابع برای دست ورزی بیشتر.

رسم توابع  $y=-x^2$  و  $y=2x^2-1$  و همچنین شماره (۳) کار در کلاس، برای این موضوع است.

۳ تعیین ضابطه نموداری که فقط از قرینه یابی و انتقال یک نمودار دیگر به دست آمده است. قسمت (پ) از شماره ۲ این کار در کلاس به این موضوع پرداخته است. برای تعیین ضابطه این تابع می توانید روش های مختلفی را انتخاب کنید.

از جمله، دو روش زیر :

■ روش اول :

$$y = -|x+2|-1 \xrightarrow[\text{محور } x]{\text{قرینه نسبت به}} y = |x+2|+1 \xrightarrow{\text{واحد به بالا}} y = |x+2| \xrightarrow{\text{واحد به چپ}} y = |x|$$

## ■ روش دوم :

$$y = |x| \xrightarrow[\text{محور } x]{\text{قرینه نسبت به}} y = -|x| \xrightarrow[۱ \text{ واحد به پایین}]{\text{واحد به چپ}} y = -|x| - 1 \xrightarrow[۲ \text{ واحد به چپ}]{\text{واحد به چپ}} y = -|x + 2| - 1$$

انبساط و انقباض افقی، آخرین بخش از این درس است. در فعالیت صفحه ۸، ابتدا نمودار تابع  $y = \sin x$  در فاصله  $[0, 2\pi]$  رسم شده است و سپس از دانش آموزان خواسته شده که نمودار تابع  $y = \sin 2x$  را در فاصله  $[0, \pi]$  رسم کنند. رسم هر دو نمودار در یک دستگاه و مقایسه آنها، انقباض افقی نمودار  $y = \sin x$  را نشان می دهد. نتیجه این فعالیت در حالت کلی به این صورت است که اگر  $(x_0, y_0)$  یک نقطه از نمودار تابع  $y = f(x)$  باشد، سپس  $(\frac{x_0}{k}, y_0)$  یک نقطه از نمودار تابع  $g(x) = f(kx)$  است. پس برای رسم تابع  $g$  کافیت طول نقاط تابع  $f$  را در  $\frac{1}{k}$  ضرب کرد.

مشابه قسمت قبل، فقط برای مقادیر مثبت  $k$ ، تقسیم بندی به صورت  $k > 1$  و  $0 < k < 1$  انجام شده و برای  $g(x) = f(-x)$ ، بحث قرینه کردن نسبت به محور  $y$  ها مطرح شده است تا برای مقادیر منفی  $k$ ، نیاز به بحث نباشد.

کار در کلاس صفحه ۱۰، دقیقاً اهداف کار در کلاس صفحه ۷ را دارد. در شماره ۱ این کار در کلاس اگر دامنه و برد تابع  $f$  برابر با  $D_f = [a, b]$  و  $R_f = [c, d]$  باشد و  $g(x) = f(kx)$ ، سپس

$$k > 0 \Rightarrow \begin{cases} D_g = [\frac{a}{k}, \frac{b}{k}] \\ R_g = [c, d] \end{cases}, \quad k < 0 \Rightarrow \begin{cases} D_g = [\frac{b}{k}, \frac{a}{k}] \\ R_g = [c, d] \end{cases}$$

آخرین مثال از این درس، به رسم نمودار توابعی به شکل  $g(x)=f(ax+b)$  می پردازد. یافتن نقطه متناظر  $(x_*, y_*)$  از نمودار  $f$  روی نمودار  $g$ ، از ضابطه معکوس  $y=ax+b$  به دست می آید :

$$y = ax + b \xrightarrow{\text{جابجایی } x \text{ و } y} x = ay + b \Rightarrow y = \frac{x-b}{a}$$

بنابراین نقطه متناظر  $(x_*, y_*)$  از  $f$ ، نقطه  $(\frac{x_*-b}{a}, y_*)$  از نمودار  $y=f(ax+b)$  خواهد بود. با توجه به این مطلب، دو روش زیر برای رسم نمودار تابع  $g$  پیشنهاد می شود.

#### ■ روش اول :

$$(x_*, y_*) \in f \xrightarrow{\text{واحد به چپ } b} (x_* - b, y_*) \xrightarrow[\text{در } a]{\text{ضرب طول نقاط}} (\frac{x_* - b}{a}, y_*) \in g$$

#### ■ روش دوم :

$$(x_*, y_*) \in f \xrightarrow[\text{در } a]{\text{ضرب طول نقاط}} (\frac{x_*}{a}, y_*) \xrightarrow[\text{انتقال به چپ}]{\text{واحد } \frac{b}{a}} (\frac{x_*}{a} - \frac{b}{a}, y_*) \in g$$

وجود روش دوم به خاطر تساوی  $\frac{x_* - b}{a} = \frac{x_*}{a} - \frac{b}{a}$  است.

## تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش پذیری و تقسیم

## اهداف درس

- ۱ درک مفاهیم یکنوا و اکیداً یکنوا و توانایی تعیین بازه‌هایی که توابع مختلف در آنها این خواص را دارند.
- ۲ درک تعریف توابع اکیداً یکنوا و حل نامعادلاتی که شامل این توابع هستند.
- ۳ آشنایی با قضیه تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها
- ۴ توانایی تعیین باقی مانده تقسیم یک چندجمله‌ای بر  $ax+b$
- ۵ توانایی تجزیه  $x^n \pm a^n$  با عامل‌های  $x \pm a$ ؛ برای  $n$ های زوج و فرد.

## روش تدریس

این درس همان‌طور که از نام آن برمی‌آید، شامل ۳ بخش است. در بخش اول تابع چندجمله‌ای تعریف می‌شود و سپس در ادامه آن، تابع درجه سوم  $y=x^3$ ، به کمک نقطه‌یابی رسم می‌شود. رسم هر تابع درجه سوم در این زمان برای دانش‌آموزان امکان‌پذیر نیست ولی می‌توان هر تابع درجه سوم را که از تبدیل تابع  $y=x^3$ ، مانند  $y=(x+1)^3-2$  حاصل می‌شود را رسم کرد. شماره ۱ از کار در کلاس صفحه ۱۴ به این موضوع می‌پردازد. در قسمت (پ) کفایت تابع را به صورت زیر بنویسیم:

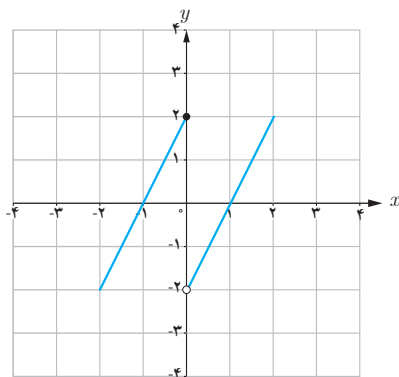
$$y=x^3-3x^2+3x=x^3-3x^2+3x-1+1=(x-1)^3+1$$

شماره ۲ از این کار در کلاس به مقایسه نمودار توابع  $y=x^3$  و  $y=x^3-3x^2+3x$  در ربع اول و در بازه  $[0,2]$  می‌پردازد و نشان می‌دهد که در فاصله  $[0,1]$ ، نمودار  $y=x^3$  پایین‌تر از نمودار  $y=x^3-3x^2+3x$  است ولی در فاصله  $[1,2]$ ، این رفتار عوض می‌شود. مقایسه رفتار این دو تابع را می‌توان از مقایسه  $x^3$  و  $x^3-3x^2+3x$  نیز نتیجه گرفت. بخش دوم این درس به توابع صعودی و نزولی پرداخته است. مفهوم صعودی و نزولی از روی نمودار صفحه ۱۵ و انجام فعالیت این صفحه به خوبی قابل درک است. تعریف دقیق این توابع در صفحه ۱۶ آمده



است. ذکر یک نکته در اینجا ضروری است: هدف این بخش، درک توابع یکنوا از روی نمودار است و نه اثبات یکنوایی به کمک ضابطه تابع.

در صفحه ۱۷، توابع اکیداً یکنوا، با همان نگاه توابع یکنوا، تعریف شده‌اند. کار در کلاس این صفحه به ۳ مطلب می‌پردازد. شماره‌های ۱ و ۲، برای رسم توابع شناخته شده و تعیین فاصله‌هایی است که این توابع در آنها اکیداً یکنوا هستند. باید دقت داشت که ممکن است یک تابع در زیر بازه‌هایی از دامنه، اکیداً یکنوا باشد ولی در کل دامنه، اکیداً یکنوا نباشد. مثلاً تابع زیر با دامنه  $\mathbb{R}$ ، اکیداً صعودی نیست ولی در فاصله‌های  $[-\infty, 0]$  و  $(0, +\infty)$  اکیداً صعودی است.



در شماره ۳ این کار در کلاس، هر تابع اکیداً صعودی در یک فاصله، صعودی نیز خواهد بود ولی عکس این مطلب صحیح نیست (مانند تابع  $y=3$  در فاصله  $(0, +\infty)$ ) برای پاسخ به این سؤال و موارد مشابه، از تعبیر فارسی نیز می‌توان استفاده کرد.

در شماره ۴، می‌دانیم که اگر تابع  $f$  در یک فاصله اکیداً صعودی باشد، سپس برای هر  $a$  و  $b$  در این فاصله داریم:

$$a > b \Rightarrow f(a) > f(b)$$

این گزاره شرطی، معادل با عکس نقیض خود یعنی گزاره شرطی زیر است:

$$f(a) \leq f(b) \Rightarrow a \leq b$$

از این مطلب برای حل نامعادلاتی می‌توان استفاده کرد که یک تابع اکیداً صعودی وجود دارد و می‌توان

تابع  $f$  را در نامعادله حذف کرد. به عنوان مثال، برای حل نامعادله قسمت (ب)، به صورت زیر عمل می کنیم :

$$\log(x+1) \leq \log(2x-3) \xrightarrow[\text{صعودی است.}]{\text{تابع } y=\log x \text{ اکیداً}} x+1 \leq 2x-3 \Rightarrow x \geq 4$$

البته باید دقت کرد که این جواب باید با دامنه توابع  $y=\log(x+1)$  و  $y=\log(2x-3)$  اشتراک گرفته شود که در اینجا جواب نهایی همان  $x \geq 4$  است.

برای توابع اکیداً نزولی، بحث مشابهی وجود دارد که تمرین ۹ در صفحه ۲۲ به این مطلب پرداخته است. آخرین بخش از این درس، تقسیم و بخش پذیری است. ابتدا قضیه تقسیم به شکل خطی به صورت  $f(x) = p(x)q(x) + r(x)$  با انجام یک فعالیت، آموزش داده می شود. سپس در فعالیت صفحه ۱۹، به کمک این قضیه به راحتی می توان باقیمانده تقسیم چندجمله ای  $f(x)$  بر  $ax+b$  را به دست آورد و نشان داد که  $r(x) = f\left(\frac{-b}{a}\right)$ . اثبات این مطلب به صورت زیر است :

$$f(x) = (ax+b)q(x) + r(x) \xrightarrow{x=\frac{-b}{a}}$$

$$f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0 \times q(x) + r(x) \longrightarrow$$

$$f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$$

کار در کلاس پایین صفحه ۱۹ برای دست ورزی در این زمینه است.

در آخرین فعالیت این درس، با انجام مراحل خواسته شده،  $x^n - a^n$  بر حسب  $x-a$  تجزیه می شود. برای انجام شماره ۳ از این فعالیت، می توان به دو صورت عمل کرد. می توانید این شماره را از شماره ۱ نتیجه گرفت و یا می توان  $x^n - a^n$  را بر  $x-a$  به صورت زیر تقسیم کرد :

$$\begin{array}{r} x^n - a^n \quad | \quad x - a \\ \underline{x^n - ax^{n-1}} \quad \quad x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1} \\ ax^{n-1} - a^n \\ \underline{ax^{n-1} - a^2x^{n-2}} \quad \quad \quad a^2x^{n-2} - a^3x^{n-3} \\ a^2x^{n-2} - a^3x^{n-3} \\ \vdots \\ 0 \end{array}$$

اینکه باقی مانده تقسیم صفر است، از شماره ۲ نتیجه می شود و اینکه خارج قسمت چگونه نوشته شده است، از مقایسه هر جمله با جمله قبل صورت گرفته است.

با تعویض  $a$  به  $-a$  و بحث راجع به  $n$  های فرد و زوج، اتحادهای دیگری نتیجه می شود که کار در کلاس صفحه ۲۰ به این مطالب پرداخته است.

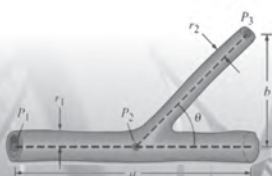
## مثلثات



۱ تناوب و تانژانت

۲ معادلات مثلثاتی

## فصل



انشعاب رگ‌ها در بدن انسان به گونه‌ای است که مقاومت هیدرولیکی درون رگ‌ها تابعی مثلثاتی از زاویه بین هر دو رگ متصل به هم است. در شبیه‌سازی کامپیوتری از شبکه رگ‌ها این خاصیت مورد توجه قرار می‌گیرد.

# تناوب و تانژانت



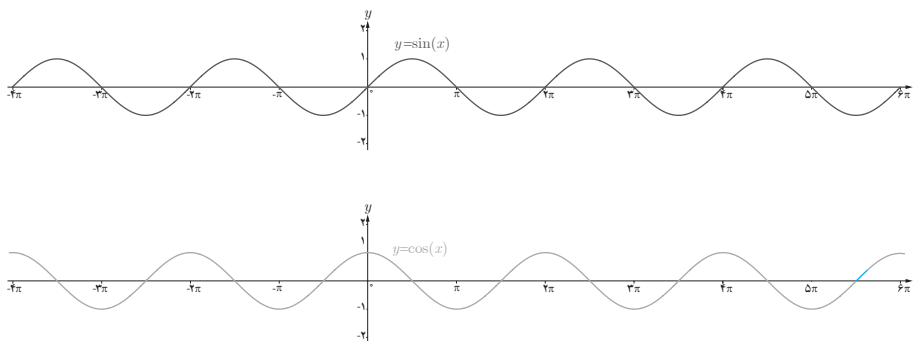
## درس

### اهداف درس

- ۱ درک مفهوم تناوب و نقش آن در ساختار توابع مثلثاتی
- ۲ تشخیص دوره تناوب در توابع با ضابطه  $y = a \sin bx + c$  و  $y = a \cos bx + c$
- ۳ تشخیص مقدار ماکزیمم و مینیمم در توابع با ضابطه  $y = a \sin bx + c$  و  $y = a \cos bx + c$
- ۴ تعیین ضابطه از روی نمودار توابع  $y = a \sin bx + c$  و  $y = a \cos bx + c$
- ۵ درک تأثیر پارامترهای  $a$ ،  $b$  و  $c$  در توابع با ضابطه  $y = a \sin bx + c$  و  $y = a \cos bx + c$  بر دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این توابع.
- ۶ آشنایی با تابع تانژانت و تغییرات آن در دایره مثلثاتی.
- ۷ آشنایی با نمودار تابع تانژانت و ارتباط آن با دایره مثلثاتی.
- ۸ تشخیص مقدار و علامت تانژانت زاویه دلخواه با استفاده از دایره مثلثاتی.

### روش تدریس

در ابتدای درس با توجه به شناخت نسبی که دانش آموزان از توابع مثلثاتی  $f(x) = \sin x$  و  $f(x) = \cos x$  دارند، مفهوم دوره تناوب بیان شده است و با تأکید بر یکسان بودن مقادیر این دو تابع برای هر دو نقطه به فاصله  $2\pi$  روی محور  $x$  این مفهوم توضیح داده شده است. در کتاب ریاضی ۲ (حسابان ۱) روابط  $\sin(x \pm 2k\pi) = \sin x$  و  $\cos(x \pm 2k\pi) = \cos x$  در فصل مثلثات آورده شده است و معلم می تواند با توضیح و یادآوری مفهوم این دو تساوی با استفاده از نمودارهای  $\sin x$  و  $\cos x$  که در صفحه ۳۲ (۲۴) کتاب رسم شده است، به درک بهتر دانش آموزان به این مفهوم کمک نماید.



با توجه به اینکه نمودار این توابع در بازه‌هایی به طول  $2\pi$ ،  $4\pi$ ،  $6\pi$ ،  $8\pi$  و ... و  $k\pi$  تکرار می‌شود، می‌توان گفت در تمام آنها تابع تکرار می‌شود اما در کتاب، دوره تناوب را کوچک‌ترین آنها معرفی کرده است و به طور کلی :

تابع  $f$  را متناوب می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند  $T$  موجود باشد به طوری که برای هر  $x \in D_f$  داشته باشیم :  $x \pm T \in D_f$  و  $f(x \pm T) = f(x)$ . کوچک‌ترین عدد مثبت  $T$  با این خاصیت را دوره تناوب  $f$  می‌نامیم.

**تذکر :** مفهوم تناوب و دوره تناوب برای توابع غیر مثلثاتی نیز به کار می‌رود ولی کتاب تنها به بررسی این مفهوم در توابع مثلثاتی که اشاره شد، پرداخته است و از تدریس تناوب در توابع دیگر احتراز شود.

همچنین از بررسی تناوب توابع مثلثاتی پیچیده که حاصل ضرب یا حاصل جمع و ... دو یا چند تابع مثلثاتی هستند نیز اجتناب شود. دلیل این امر تأکید بر مفهوم اصلی تناوب و نیز احتراز از تکنیک‌های محاسباتی برای یافتن دوره تناوب توابعی است که دانش آموز صرفاً با توجه به عملیات جبری، دوره تناوب آنها را یافته و قادر به رسم نمودار آنها نیست و نمی‌تواند تناوب تابع را از روی نمودار آن بررسی کند.

از این رو به دبیران محترم توصیه می‌شود که با استفاده از ابزارهای نوین آموزشی مانند نرم افزار جئوجبرا (GeoGebra)<sup>۱</sup> سعی در تعمیق مفهوم به جای آموزش رویه‌های جبری داشته باشند. بدیهی است آموزش رویه‌ها نیز در جای خود اهمیت داشته و بخش بزرگی از آموزش ریاضی را تشکیل می‌دهند. اما تأکید روی این رویه‌ها بدون درک درستی از مفهوم دوره تناوب مدنظر کتاب نمی‌باشد.

۱- این نرم افزار از سایت [www.GeoGebra.org](http://www.GeoGebra.org) قابل دانلود است. در این سایت محتواهای مفیدی برای استفاده در کلاس درس قابل دسترسی است.

## فعالیت ص ۲۴

۱ هدف این فعالیت، بررسی تأثیر ضریب  $a$  در تابع  $f(x)=a\sin x$  بر دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع است. در جدول صفحه ۲۵ نمودار توابع مختلفی با ضابطه  $y=a\sin x$  و مقادیر مختلف  $a$  رسم شده است، که مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب توابع از روی نمودار آنها مشخص می‌شود. برای مثال در تابع  $y=-3\sin x$ ، مقدار ماکزیمم ۳ و مقدار مینیمم -۳ است و دوره تناوب  $2\pi$  است و یا در تابع  $y=-\frac{1}{3}\sin x$  مقدار ماکزیمم  $\frac{1}{3}$  و مقدار مینیمم  $-\frac{1}{3}$  است و دوره تناوب نیز  $2\pi$  است.

۲ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که در تابع  $y=a\sin x$  و  $y=a\cos x$  داریم:

$$\max=|a|, \quad \min=-|a|, \quad T=2\pi$$

یعنی ضریب  $a$  بر مقدار ماکزیمم و مینیمم مؤثر است ولی دوره تناوب را تغییر نمی‌دهد.

۳ همچنین با توجه به ویژگی‌های انتقال توابع بدیهی است که در صورت انتقال عمودی یک تابع، دوره تناوب آن تغییر نمی‌کند ولی مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع تغییر می‌کنند و داریم:

$$\begin{cases} y = a \sin x + c \\ y = a \cos x + c \end{cases} \rightarrow \max = |a| + c, \quad \min = -|a| + c, \quad T = 2\pi$$

## فعالیت ص ۲۶

۱ هدف این فعالیت بررسی تأثیر ضریب  $b$  در تابع  $y=\sin bx$  بر دوره تناوب و مقادیر  $\max$  و  $\min$  این تابع است. در جدول این فعالیت، نمودار توابع مختلفی با ضابطه  $y=\sin bx$  و مقادیر مختلف  $b$  رسم شده است که مقادیر  $\max$  و  $\min$  و دوره تناوب توابع از روی نمودار آنها مشخص می‌شود. برای مثال در تابع  $y=\sin(-3x)$ ، مقدار  $\max$  برابر ۱ و مقدار مینیمم برابر -۱ و دوره تناوب  $\frac{2\pi}{3}$  است و یا در تابع  $y=\sin(\frac{x}{3})$  مقدار  $\max$  برابر ۱ و مقدار مینیمم برابر -۱ و دوره تناوب  $4\pi$  است.

۲ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که در تابع  $y=\sin bx$  و  $y=\cos bx$  داریم:

$$\max=1, \quad \min=-1, \quad T=\frac{2\pi}{|b|}$$

۳ همچنین با توجه به ویژگی‌های انتقال توابع بدیهی است که در صورت انتقال عمودی یک تابع، دوره تناوب آن تغییری نمی‌کند ولی مقادیر max و min تابع تغییر می‌کنند و داریم :

$$\begin{cases} y = \sin bx + c \\ y = \cos bx + c \end{cases} \rightarrow \max = 1 + c, \min = -1 + c, T = \frac{2\pi}{|b|}$$

نتیجه : با توجه به دو فعالیت قبل می‌توان گفت که در دو تابع  $y = a \sin bx + c$  و  $y = a \cos bx + c$  ضرب  $a$  در دوره تناوب تابع تأثیری ندارد ولی در مقدار max و min آن مؤثر است اما ضرب  $b$  در دوره تناوب تابع مؤثر بوده ولی در مقدار max و min آن تأثیری ندارد و انتقال عمودی نیز که با مقدار  $c$  مشخص می‌شود در دوره تناوب بی‌تأثیر است و فقط در مقدار max و min تابع اثرگذار است.

توابع  $y = a \sin bx + c$  و  $y = a \cos bx + c$  دارای مقدار ماکزیمم  $|a| + c$  و مقدار مینیمم  $-|a| + c$  و دوره تناوب  $\frac{2\pi}{|b|}$  است.

بنابراین اگر ضابطه تابعی به فرم  $y = a \sin bx + c$  و  $y = a \cos bx + c$  باشد می‌توانیم مقادیر ماکزیمم و مینیمم و همچنین دوره تناوب تابع را به دست آوریم و به عکس اگر این مقادیر را داشته باشیم می‌توانیم ضابطه توابع مورد نظر را بنویسیم.

### مثال ص ۲۷

در این مثال چهار ضابطه تابع داده شده و دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر کدام را خواسته است که با استفاده از مطالبی که گفته شد می‌توان مقادیر مورد نظر را به دست آورد :

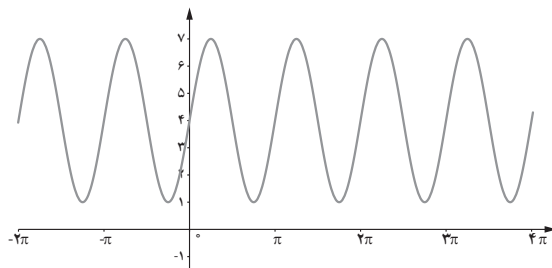
الف)  $\left. \begin{matrix} y = 3 \sin(2x) - 2 \\ a = 3, b = 2, c = -2 \end{matrix} \right\} \rightarrow \begin{matrix} \max = |a| + c = |3| - 2 = 1 \\ \min = -|a| + c = -|3| - 2 = -5 \end{matrix}$

و  $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$

ب)  $\left. \begin{matrix} y = \pi \sin(-x) + 1 \\ a = \pi, b = -1, c = 1 \end{matrix} \right\} \rightarrow \begin{matrix} \max = |\pi| + 1 = \pi + 1 \\ \min = -|\pi| + 1 = 1 - \pi \end{matrix}$

و  $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|-1|} = 2\pi$

در این مثال چهار نمودار مثلثاتی آورده شده و با تشخیص دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم، ضابطه تابع را خواسته است.



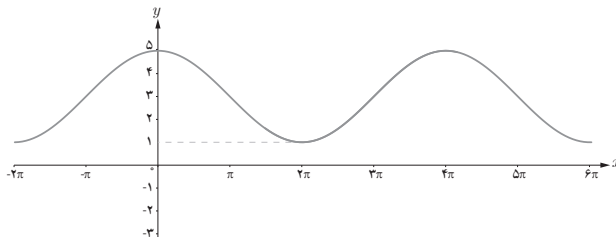
(الف)

با توجه به نمودار متوجه می شویم که ماکزیمم یا مینیمم تابع در  $x=0$  واقع شده است، بنابراین ضابطه تابع مورد نظر می تواند به صورت  $y = a \sin bx + c$  باشد. مقدار max برابر ۷ و مقدار min برابر ۱ است. همچنین با دقت در نمودار مشخص است که طول بازه ای که تابع در آن یک بار تکرار می شود برابر  $\pi$  است، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} |a| + c = 7 \\ -|a| + c = 1 \end{cases} \rightarrow 2c = 8 \rightarrow c = 4, \quad |a| = 3 \quad \text{و} \quad \frac{2\pi}{|b|} = \pi \rightarrow |b| = 2$$

همان طور که ملاحظه می کنید همواره مقدار  $c$ ، میانگین max و min تابع است. پس ضابطه تابع به صورت  $y = 3 \sin 2x + 4$  یا  $y = -3 \sin(-2x) + 4$  است، یعنی  $a$  و  $b$  یا هر دو مثبت یا هر دو منفی هستند که در کتاب هر دو مقدار  $a$  و  $b$  را مثبت فرض کرده و ضابطه  $y = 3 \sin 2x + 4$  را نوشته است.

(ب)





با توجه به نمودار متوجه می‌شویم که ماکزیمم تابع در  $x=0^\circ$  واقع شده است. بنابراین ضابطه تابع مورد نظر می‌تواند به صورت  $y = a \cos bx + c$  باشد. مقدار max برابر ۵ و مقدار min برابر ۱ است. از نمودار پیداست که دوره تناوب برابر  $4\pi$  است، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} |a| + c = 5 \\ -|a| + c = 1 \end{cases} \rightarrow 2c = 6 \rightarrow c = 3, \quad c = 3, \quad |a| = 2$$

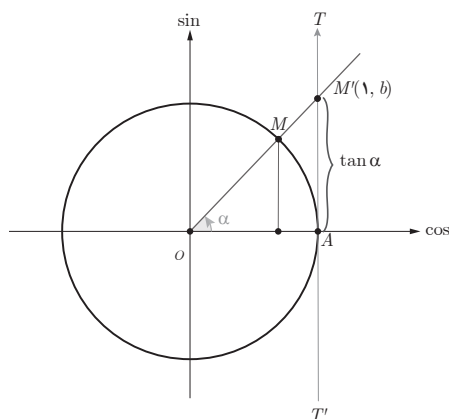
که  $a$  و  $b$  هر دو مثبت هستند.

$$\frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \rightarrow |b| = \frac{1}{2}$$

بنابراین ضابطه تابع به صورت  $y = 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 3$  است.

## تائزانت

### فعالیت ص ۲۹



هدف این فعالیت معرفی محور تائزانت و تشخیص مقدار و علامت تائزانت برای زوایای مختلف در نواحی دایره مثلثاتی است.

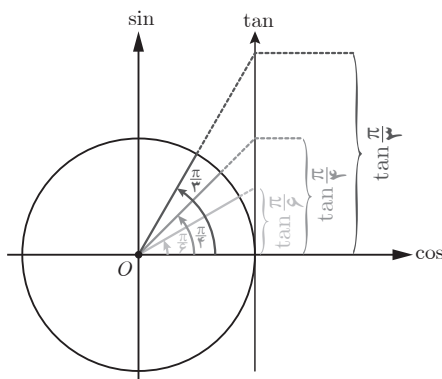
در قسمت الف، باید این مطلب توضیح داده شود که تائزانت هر زاویه دلخواه مانند  $\alpha$ ، از برخورد امتداد ضلع دوم آن زاویه با خط  $TAT'$  تعیین می‌شود و این خط را محور تائزانت می‌نامیم. توصیه می‌شود دبیران محترم علاوه بر شکل کتاب که تائزانت زاویه‌ای در ربع اول را مشخص کرده است، برای هر سه ناحیه دیگر مثال‌های دلخواه زده و از دانش‌آموزان بخواهند تا تائزانت زاویه‌ها را مشخص نمایند. تشخیص علامت تائزانت زاویه که بستگی به ناحیه زاویه دارد نیز یک هدف آموزشی مهم بوده که باید به دقت توضیح داده شود.

در قسمت پ توضیح تعریف نشده بودن  $\tan \frac{\pi}{4}$  باید با رسم زاویه‌هایی که در ربع اول به  $\frac{\pi}{4}$  نزدیک می‌شوند صورت بگیرد. همچنین توضیح در مورد  $\tan \frac{3\pi}{4}$  با رسم زاویه‌هایی در ربع سوم که به  $\frac{3\pi}{4}$  نزدیک می‌شوند انجام می‌شود.

## تغییرات تانژانت

### فعالیت ص ۳۰

این فعالیت به منظور بررسی تغییرات تابع تانژانت طراحی شده است. در شکل، چند زاویه که دانش‌آموزان با آن آشنا هستند مشخص شده است و تانژانت این زوایا روی محور تانژانت با رنگ‌های مربوط تعیین شده است. دانش‌آموز با دقت در مقادیر تانژانت زوایای مورد نظر درمی‌یابد که با بزرگ شدن زاویه‌ها در ربع اول، مقادیر تانژانت نیز افزایش می‌یابند و با افزایش مداوم مقادیر زاویه  $\alpha$  در این ربع و نزدیک شدن آن به  $\frac{\pi}{4}$ ، مقدار تانژانت بیشتر و بیشتر می‌شود تا اینکه در  $\frac{\pi}{4}$  تعریف نشده است. نکته مهم در این فعالیت جلب توجه دانش‌آموزان به تغییرات تانژانت در ربع اول است.



این کار در کلاس تعمیم و جمع‌بندی فعالیت قبلی است که در آن تغییرات تانژانت در ربع‌های دوم تا چهارم نیز بررسی شده است و در قسمت الف روند تغییر مدنظر بوده است که روند تغییرات تانژانت در هر ربع افزایشی است. در قسمت ب بازه تغییرات مقدار تانژانت را در هر ربع خواسته است که به‌صورت زیر است :

ربع دوم:  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \rightarrow \tan \alpha \in (-\infty, 0)$

ربع سوم:  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \rightarrow \tan \alpha \in (0, +\infty)$

ربع چهارم:  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \rightarrow \tan \alpha \in (-\infty, 0)$

در قسمت پ جدولی داده شده است که مقادیر تانژانت را برای زوایایی که در ریاضی ۱ و حسابان ۱ دانش‌آموز با نسبت‌های مثلثاتی آنها آشنا شده، خواسته است که در همه ربع‌ها جهت تغییرات صعودی و علامت ↗ است. هدف این بررسی با جزئیات فوق، فراهم آوردن مقدمات رسم نمودار تابع تانژانت است.

### تابع تانژانت :

ماهیت تابعی تانژانت در صفحه ۳۲ به‌صورت رسمی بیان شده است و اینکه به ازای هر زاویه دلخواه  $\alpha$  در دایره مثلثاتی (به جز  $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$  و  $k \in \mathbb{Z}$ ) مقداری حقیقی به‌عنوان  $\tan \alpha$  داریم این امر را به‌طور واضح بیان می‌کند.

دامنه و برد تابع تانژانت نیز در همین قسمت معرفی شده است. دوره تناوب تانژانت  $\pi$  است زیرا :

$$\tan(\pi+x)=\tan x$$

و مقداری کوچک‌تر از  $\pi$  وجود ندارد که این رابطه به ازای آن برقرار باشد.

کتاب در مورد دوره تناوب محدودیتی را قرار داده است که «به‌دست آوردن دوره تناوب تابع شامل تانژانت مد نظر نیست.» مثلاً به‌دست آوردن توابعی مانند  $\tan^2 x$ ,  $\tan^3 x$ ,  $\tan^4 x$ ,  $\tan x + \tan^4 x$  و ... مد نظر نیست. بنابراین رسم توابع شامل تانژانت مانند  $\tan^2 x + 1$ ,  $\tan^3 x$  و ... مدنظر نبوده و استفاده از آنها در ارزشیابی‌ها و آزمون‌ها مجاز نیست.

الف)  $y = 1 + 2 \sin \sqrt{x}$

$$a = 2, b = \sqrt{x}, c = 1$$

$$\max = |a| + c = |2| + 1 = 3$$

$$\min = -|a| + c = -|2| + 1 = -1$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|\sqrt{x}|} = \frac{2\pi}{\sqrt{x}}$$

ب)  $y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{\sqrt{x}} x$

$$a = -1, b = \frac{\pi}{\sqrt{x}}, c = \sqrt{3}$$

$$\max = |-1| + \sqrt{3} = 1 + \sqrt{3}$$

$$\min = -|-1| + \sqrt{3} = \sqrt{3} - 1$$

$$T = \frac{2\pi}{\left| \frac{\pi}{\sqrt{x}} \right|} = 2\sqrt{x}$$

پ)  $y = -\pi \sin\left(\frac{x}{\sqrt{x}}\right) - 2$

$$a = -\pi, b = \frac{1}{\sqrt{x}}, c = -2$$

$$\max = |-\pi| - 2 = \pi - 2$$

$$\min = -|-\pi| - 2 = -\pi - 2$$

$$T = \frac{2\pi}{\left| \frac{1}{\sqrt{x}} \right|} = 2\pi\sqrt{x}$$

ت)  $y = -\frac{3}{4} \cos \sqrt{x} x$

$$a = -\frac{3}{4}, b = \sqrt{x}, c = 0$$

$$\max = \left| -\frac{3}{4} \right| + 0 = \frac{3}{4}$$

$$\min = -\left| -\frac{3}{4} \right| + 0 = -\frac{3}{4}$$

$$T = \frac{2\pi}{|\sqrt{x}|} = \frac{2\pi}{\sqrt{x}}$$

۲ در این سؤال باید با توجه به ضابطه‌ها و ویژگی‌های نمودارها، نمودار هر ضابطه را مشخص کنیم. ابتدا دوره تناوب و  $\max$  و  $\min$  هر ضابطه را تعیین می‌نماییم.

الف)  $y = \sin \pi x \rightarrow \max = 1, \min = -1, T = 2$

ب)  $y = 2 - \cos \frac{1}{\sqrt{x}} x \rightarrow \max = 3, \min = 1, T = 4\pi$

پ)  $y = \sin \sqrt{x} x \rightarrow \max = 1, \min = -1, T = \pi$

ت)  $y = 1 - \cos \sqrt{x} x \rightarrow \max = 2, \min = 0, T = \pi$

نمودار ۱:  $\max = 2, \min = 0, T = \pi$  است، بنابراین ضابطه نمودار ۱،  $y = 1 - \cos \sqrt{x} x$  (قسمت ت) است.

نمودار ۲ :  $\max=3$  ،  $\min=1$  و  $T=4\pi$  است، بنابراین ضابطه نمودار ۲،  $y=2-\cos\frac{1}{4}x$  (قسمت ب) است.

نمودار ۳ :  $\max=1$  ،  $\min=-1$  و  $T=\pi$  است، بنابراین ضابطه نمودار ۳،  $y=\sin 2x$  (قسمت پ) است.

نمودار ۴ :  $\max=1$  ،  $\min=-1$  و  $T=\frac{2\pi}{3}$  است، بنابراین ضابطه نمودار ۴،  $y=\sin \pi x$  (قسمت الف) است.

۳ در این سؤال دوره تناوب و مقدار  $\max$  و  $\min$  داده شده است و ضابطه تابعی مثلثاتی خواسته است. پاسخ‌های مختلفی برای این سؤال می‌توان نوشت :

$$\text{الف) } c=0, |a|=3, |b|=2 \rightarrow y=3\sin 2x$$

$$\text{ب) } c=6, |a|=3, |b|=\frac{2\pi}{3} \rightarrow y=-3\cos\left(\frac{2\pi}{3}x\right)$$

$$\text{پ) } c=-4, |a|=3, |b|=\frac{1}{4} \rightarrow y=3\sin\left(-\frac{1}{4}x\right)-4$$

$$\text{ت) } c=0, |a|=1, |b|=4 \rightarrow y=-\cos(-4x)$$

از دانش‌آموزان بخواهید ضابطه‌های دیگری را نیز بنویسند.

۴

الف) ماکزیمم یا مینیمم نمودار در  $x=0$  واقع شده است، بنابراین ضابطه تابع مورد نظر می‌تواند به صورت  $y=a \sin bx+c$  باشد.

$$c=1, |a|=2, |b|=\frac{1}{4} \rightarrow y=2\sin\left(\frac{x}{4}\right)+1$$

ب) ضابطه این تابع می‌تواند به صورت  $y=a \cos bx+c$  باشد.

$$\text{الف) } c=-1, |a|=3, |b|=2 \rightarrow y=-3\cos 2x-1$$

۵

الف) نادرست زیرا :  $\frac{\pi}{4} < \frac{7\pi}{6}$  ولی  $\tan \frac{\pi}{4} > \tan \frac{7\pi}{6}$ . تابع تانژانت در دامنه‌اش غیریکنواست.

ب) نادرست، زیرا تابع تانژانت در تمام بازه‌هایی که تعریف می‌شود اکیداً صعودی است.

پ) با توجه به ویژگی‌های تابع تانژانت درست است.

۶ در این سؤال، با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، مقایسهٔ مقادیر  $\sin \alpha$  و  $\tan \alpha$  را خواسته است.  
الف)  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

در ربع اول هم سینوس و هم تانژانت صعودی است.

	°		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
sin	°	↗	$\frac{1}{2}$	↗	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	۱
tan	°	↗	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	↗	۱	↗	$\sqrt{3}$	↗	$+\infty$ ت ن

ب)  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$   
در ربع چهارم هم سینوس و هم تانژانت صعودی است.

	$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{3}$		$\frac{7\pi}{4}$		$\frac{11\pi}{6}$		$2\pi$
sin	-۱	↗	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗	$-\frac{1}{2}$	↗	۰
tan	$-\infty$ ت ن	↗	$\sqrt{3}$	↗	-۱	↗	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	↗	۰

# ۲

## درس

### معادلات مثلثاتی

#### اهداف درس

درس دوم از فصل مثلثات به معادلات مثلثاتی می‌پردازد. هدف از این فصل آشنا کردن دانش‌آموزان با معادلات مثلثاتی و نحوه حل و تفسیر جواب‌های معادلات مثلثاتی برای برخی معادلات ساده است. گفتنی است که رعایت حدود و ثغور این معادلات در آموزش برای اتمام محتوای کل کتاب در طول سال تحصیلی از یک سو و رعایت آنها برای ارزشیابی از سوی دیگر ضروری است.

**اهداف آموزشی مدنظر این درس به قرار زیر هستند :**

- ۱ آشنایی با معادلات ساده مثلثاتی و ارتباط آنها نمودار توابع مثلثاتی متناظر
- ۲ حل معادلات ساده مثلثاتی و یافتن جواب‌های کلی معادلات
- ۳ بررسی درسی جواب با توجه به محدودیت‌های مطرح شده در مسایل کاربردی

#### روش تدریس

این درس به معادلات مثلثاتی ساده همراه با برخی کاربردهای مقدماتی آنها در مدلسازی می‌پردازد. بررسی معادلات مثلثاتی بر پایه دانش قبلی دانش‌آموزان است از جمله اینکه دانش‌آموزان با نمودار توابع مثلثاتی ساده آشنا هستند. از این رو با برجسته کردن ارتباط بین جواب معادلات مثلثاتی و صفرهای توابع مثلثاتی نظیر، رفته رفته حالت کلی (یا جواب کلی) معادلات ساده مثلثاتی را به کمک خود دانش‌آموزان

به دست می‌آوریم. اینکار فرایند ابتدا برای معادله  $\sin x = 0$  و  $\sin x = 1$  انجام شده و سپس در فعالیت

ص ۳۶ برای معادله  $\sin x = \frac{1}{4}$  دنبال شده است.

### فعالیت ص ۳۶

از این فعالیت ابتدا با دانش قبلی دانش‌آموزان از روابط مثلثاتی و جدول مقادیر مثلثاتی سعی در یافتن

جواب‌های معادله  $\sin x = \frac{1}{4}$  می‌شود. احتمالاً دانش‌آموزان به این شیوه تعدادی از جواب‌ها را حدس

می‌زنند اما نه همه آنها را. سپس از طریق رسم نمودار تابع  $y = \sin x$  و قطع دادن آن با خط  $y = \frac{1}{4}$  راه منسجم‌تری برای یافتن جواب‌های معادله می‌یابند. در گام بعدی سعی در دسته‌بندی جواب‌های یافته می‌شود. در این مرحله از دایره مثلثاتی برای دسته‌بندی جواب‌ها استفاده می‌شود. به این طریق گام به گام

دانش‌آموزان را در یافتن جواب‌های کلی معادله  $\sin x = \frac{1}{4}$  راهنمایی می‌کنیم. در ادامه آخرین گام برای حالت کلی معادله یعنی  $\sin x = a$  که  $-1 \leq a \leq 1$  انجام داده شده است. توصیه می‌شود که قبل از ارائه حالت کلی معادله سینوسی، با چند مثال دیگر گام‌های فعالیت قبل تکرار شود و پس از آن به حالت کلی معادله  $\sin x = a$  که  $-1 \leq a \leq 1$  پرداخته شود. پس از چند مثال و کار در کلاس به معادلات کسینوسی می‌پردازیم.

### فعالیت ص ۳۸

این فعالیت مشابه فعالیت قبل اما برای معادلات کسینوسی است. در اینجا گام اول که حدس و آزمایش به کمک جدول مقادیر کسینوس و روابط مثلثاتی آن است حذف نشده است. چنانچه دبیران محترم انجام این گام را برای دانش‌آموزان خود لازم می‌دانند. می‌توانند آنرا همانند فعالیت قبل اجرا کنند. در پایان با استفاده از دایره مثلثاتی و دسته‌بندی کردن جواب‌های به‌دست آمده از تقاطع نمودارها، جواب‌های کلی

معادله کسینوسی  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$  به دست می‌آیند.



پس از فعالیت ص ۳۸، حالت کلی معادلات کسینوسی به صورت  $\cos x = a$  که  $-1 \leq a \leq 1$  از طریق دایره مثلثاتی بررسی شده و جواب‌های کلی آن داده شده است.

شایان ذکر است که در این درس فقط به معادلاتی پرداخته می‌شود که در نهایت زاویه مورد نیاز برای محاسبه جواب‌ها شناخته شده باشد مثلاً معادلاتی که نهایتاً به صورت  $\sin x = \frac{\pi}{3}$  ختم می‌شوند مورد نظر نیست و لذا نیازی به تعریف زوایای معکوس مثلثاتی و نیز مفهوم زاویه اصلی نمی‌باشد.

در ادامه سعی شده با جواب‌هایی از معادلات که می‌بایست در شرط خاصی صدق کنند پرداخته شود. دانش‌آموزان در مثال آخر ص ۳۹ در شرایطی واقعی و کاربردی از این نوع محدودیت‌ها که به طور طبیعی ظاهر می‌شوند آشنا می‌شوند. اغلب جواب‌هایی از معادله که در شرایط خواسته شده از مسئله صدق می‌کنند را «جواب‌های خاص» می‌گویند. در کتاب از این اصطلاح غیرضروری پرهیز شده و به جای آن سعی شده دانش‌آموز از خلال خواسته‌های مسئله‌ها و اطلاعات داده شده درک کند که همه جواب‌های به دست آمده از معادله جواب مسئله نیستند.

در صفحه ۴۱، با رسم نمودار تابع  $y = \tan x$  و خط  $y = a$  به جواب‌های معادله  $\tan x = a$  که همان طول نقاط تقاطع دو نمودار است؛ دست می‌یابد و با بررسی معادله  $\tan x = a$  در دایره مثلثاتی جواب‌های کلی این معادله یعنی  $x = k\pi + \alpha$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) را به دست می‌آورد. همچنین در صفحه ۴۲، رابطه تانژانت مجموع زاویه را به دست آورده است که در مثال ص ۴۳ یک مثال کاربردی از این رابطه آورده شده است.

## نمونه سؤالات برای ارزشیابی

۱ فرض کنید  $\sin \alpha = a$  و  $\alpha$  زاویه‌ای حاده باشد. حاصل عبارات زیر را برحسب  $a$  بدست آورید.

الف)  $\sin 2\alpha$

ب)  $\cos 2\alpha$

۲ معادلات زیر را حل کنید.

الف)  $\sin 5x = \sin (2x + 1)$

ب)  $\cos 2x - \sin x - 2 = -2$

ج)  $\sin 2x - \sin x = 0$



# حدهای نامتناهی – حد در بی نهایت



## فصل

۱. حدهای نامتناهی

۲. حد در بی نهایت

آذربایجان غربی (ماکو)

بسیاری از پدیده‌های طبیعی به وسیله توابع ریاضی مدل‌سازی می‌شوند. در مسئله پاک‌سازی آب رودخانه‌ها، با تابع  $f(x) = \frac{255x}{100-x}$  مدل‌سازی می‌شود. که در آن  $x$  درصد آلودگی و  $f(x)$  هزینه پاک‌سازی برحسب میلیون تومان است. از آنجا که این تابع رفتار بی‌نهایت دارد برای پاک‌سازی نزدیک صد درصد آلودگی‌های آب این رودخانه هزینه‌ها بسیار زیاد خواهد بود. به طوری که می‌توان گفت هزینه‌ها به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

## حدهای نامتناهی – حد در بی نهایت

### اهداف کلی فصل ۳

- ۱ آشنایی با حدهای نامتناهی
- ۲ آشنایی با حد تابع در بی نهایت
- ۳ آشنایی با مجانب‌های قائم و افقی تابع
- ۴ آشنایی با حدهای نامتناهی در بی نهایت

### عملکرد مورد انتظار از دانش آموزان

- دانش آموزان باید بتوانند :
  - ۱ درک مفاهیمی از حدهای یک طرفه نامتناهی و حد نامتناهی داشته باشند و از طریق جدول و نمودار توابع این مفاهیم را بیان کنند.
  - ۲ درک مناسبی از قضایای حدهای بی نهایت و حد در بی نهایت داشته باشند و در حل مسائل از آنها استفاده کنند.
  - ۳ با استفاده از قضایا، حدود توابع در بی نهایت را حدس زده و محاسبه کنند.
  - ۴ مجانب‌های قائم و افقی تابع کسری (گویا) و تابع تانژانت را در صورت وجود به دست آورند و از آنها در رسم تابع بهره بگیرند.
  - ۵ از طریق نمودار توابع، رفتار تابع در یک نقطه و رفتار تابع در بی نهایت را تشخیص دهند و مجانب‌های افقی و قائم تابع را در صورت وجود نشان دهند.

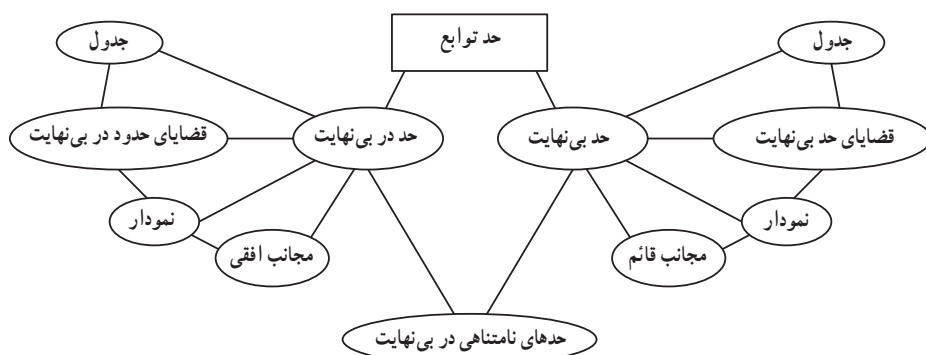
### پیش نیازها

- ۱ آشنایی با مفهوم حد و قضایای حد تابع در یک نقطه
- ۲ آشنایی با نمودار تابع تانژانت، نمودار توابع  $y = \frac{1}{x}$  و  $y = \frac{1}{|x|}$  و ...

## زمان بندی پیشنهادی

پیشنهاد می شود این فصل در ۳ هفته آموزشی تدریس و تمرین شود.

## نقشه مفهومی



## نگاه کلی به فصل

هدف اصلی این فصل درک مناسب از مفهوم بی نهایت و آشنایی با قضایای رفتار تابع در بی نهایت و رفتار تابع در همسایگی یک نقطه وقتی تابع تابع رفتار بی نهایتی دارد می باشد. همچنین آشنایی با مجانِب های افقی و قائم تابع در رسم توابع می تواند از اهداف اصلی این فصل باشد. روش آموزشی انتخاب شده در این فصل به گونه ای نیست که دانش آموزان صرفاً محاسبات صوری انجام دهند بلکه درک روش ها در ارتباط آنها با دنیای واقعی از اهداف مهم این فصل و سایر فصول است.

روش آموزشی این فصل بر مبنای فعالیت و کار در کلاس و راهنمایی قدم به قدم دانش آموز برای مواجهه با مفهوم است. به گونه ای که دانش آموزان خودشان را در ساخت مفهوم مشارکت داشته باشند. آشنایی با قضایای مربوطه صرفاً از طریق مثال های جبری و هندسی مورد نظر است و بیشتر کاربرد قضایا در حل مسائل مورد توجه است و در هیچ جا وارد اثبات قضایا نشده ایم.

### اهداف درس

- ۱ آشنایی با مفهوم حد بی‌نهایت از طریق جدول و نمودار
- ۲ مهارت محاسبه حدود نامتناهی با استفاده از قضایا و
- ۳ آشنایی با مجانب قائم نمودار یک تابع

### روش تدریس

دانش‌آموزان در سال قبل با مفهوم حد و قضایای آن آشنا شده‌اند و رفتار تابع در یک نقطه را از طریق جدول و نمودار درک می‌کنند. در این درس با رفتار تابع در همسایگی محذوف یک نقطه در حالتی که تابع رفتار بی‌نهایت دارد آشنا می‌شویم. در اولین فعالیت در صفحه ۴۶ دانش‌آموزان نمودار تابع  $y = \frac{1}{x}$  را می‌شناسند. از طریق این نمودار در همسایگی راست  $x = 0$  و همچنین در کار در کلاس صفحه ۵۳ در همسایگی چپ  $x = 0$  با همسایگی‌های یک طرفه یک نقطه آشنا می‌شوند. در بند ۱ فعالیت صفحه ۵۲ با تکمیل جدول به این درک می‌رسد که هرچه به نقطه صفر نزدیک‌تر می‌شویم مقدار تابع افزایش می‌یابد.

$$\frac{1}{x} > 10^6 \Rightarrow x < \frac{1}{10^6}$$

بند ۲

با یک محاسبه ساده مشخص می‌شود که  $x$  را باید از یک میلیونیم کوچک‌تر بگیریم تا  $f(x)$  از یک میلیون بزرگ‌تر شود.

بند ۳ دانش‌آموزان باید به این درک برسند که با نزدیک شدن به صفر از سمت راست نقطه تابع به عدد خاصی نزدیک نمی‌شود بلکه هر عددی در نظر بگیریم از آن هم نزدیک‌تر می‌توان شد.

✱ پس از بررسی این فعالیت دانش‌آموزان را هدایت به این مسئله می‌کنیم که وقتی  $x$  با مقادیر بزرگ‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شود مقادیر  $f(x)$  بدون هیچ محدودیتی افزایش می‌یابد.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ می‌نویسیم و می‌کنیم و معرف می‌کنیم}$$

تذکر صفحه ۵۳ مطلب مهمی است که حتماً باید یادآوری شود.

## کار در کلاس ص ۴۷

شبیه همان کار در کلاس که در فعالیت قبل مطرح شد اینجا انجام می‌شود. در حقیقت دانش‌آموزان باید بتوانند در همسایگی چپ  $x=0$  رفتار تابع  $y = \frac{1}{x}$  را درک کنند.

بند (الف) در جدول مشاهده می‌شود که هرچه از سمت چپ به صفر نزدیک می‌شویم مقادیر  $f(x)$  از نظر قدر مطلق بزرگ و بزرگ‌تر می‌شوند.

$$\frac{1}{x} < -10^6 \Rightarrow x > \frac{-1}{10^6} \text{ یا } x > 0.000001 \quad (\text{ب})$$

$x$  باید از منفی یک میلیونیم بزرگ‌تر در نظر گرفته شود.

(پ) وقتی  $x$  از سمت چپ به صفر نزدیک می‌شود مقادیر  $f(x)$  کوچک و کوچک‌تر می‌شوند.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad (\text{ت})$$

تذکر : می‌توان نتایج جدول فوق را روی محور اعداد نیز نشان داد تا چگونگی ارتباط را بهتر درک کنند در پایان کار در کلاس می‌توان به جمع‌بندی معرفی حدهای یک طرفه نامتناهی پرداخت. یادآوری حالات مختلف حدهای یک طرفه نامتناهی در صفحه ۴۸ و از طریق نمودار آمده است می‌توان از دانش‌آموزان خواست رفتار هر تابع در همسایگی نقطه  $x=0$  را از طریق شکل‌های داده شده بیان کنند.

بعد از این تذکر مثالی ارائه شده است رفتار تابع  $y = \frac{1}{|x|}$  در همسایگی نقطه  $x=0$  از چپ و راست دارای یک رفتار است و در پایان این مثال رسماً تعریف حد نامتناهی ارائه می‌شود.

## کار در کلاس ص ۵۰

در جهت تثبیت و تعمیق مطالب آموخته شده از طریق نمودار سه تابع دیگر رفتار تابع مشاهده می شود. با نمودار  $y = \frac{1}{x-2}$  تا حدودی آشنا هستند همان انتقال نمودار  $y = \frac{1}{x}$  می باشد. در همسایگی نقطه  $x=2$  مشاهده می شود که  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$  در تابع  $y = \log_2 x$  تابع فقط در همسایگی راست  $x=0$  تعریف می شود که  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$  با نمودار تابع  $y = \tan x$  در فصل قبل آشنا شده اند در اینجا به درک مناسبی در رابطه با رفتار تابع در نقاطی که تانژانت تعریف نمی شود می شوند.

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{-\pi}{2})^+} h(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} h(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} h(x) = -\infty$$

در ادامه و پس از درک اولیه در رابطه با حدهای نامتناهی قضایای مربوطه مطرح می شوند. همه این قضایا با مثال تفهیم می شوند و به هیچ وجه وارد اثبات رسمی آن نمی شویم.

## کار در کلاس ص ۵۱

برای تثبیت قضایای مطرح شده در این صفحه یک کار در کلاس مطرح شده است. (الف)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = +\infty$  هم از طریق نمودار این مطلب مشخص شده است و هم از طریق قضیه ۱ در حالتی که  $n=2$

$$(ب) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{استفاده از قضیه (۱)}$$

می توان از قضیه (۲) نیز یادآور شد که در (الف) حد راست و حد چپ تابع در  $\lambda=0$  برای  $+\infty$  است لذا تابع در این نقطه حد نامتناهی  $+\infty$  دارد ولی در قسمت (ب) حد چپ و حد راست تابع یکسان نشده اند لذا نمی توان نتیجه گرفت که تابع در این نقطه حد نامتناهی دارد. در مثال ص ۵۲، هدف درک مناسبی از مفهوم بی نهایت در یک مدل سازی واقعی در مسائل پیرامونی است.

در این صفحه و صفحه بعد چند مثال آمده است تا به جوانب مختلف قضایای مطرح شده پرداخته شود. این مثال ها برای درک مناسب و مهارت های ساده محاسبه حدود هستند. از طرح مسائل پیچیده خصوصاً مسائلی که متغیر در زیر رادیکال است اجتناب شود. طرح سؤالات باید به گونه ای باشد که توابع آن مورد



نیاز باشند و یا پیچیدگی های لازم را نداشته باشند و از طرح توابع جبری مثلثاتی و رادیکال هایی که محاسبات دشوار دارند خودداری شود تا مفهوم فدای تکنیک نشود بدیهی است برای دانش آموزان قوی تر طرح این گونه مسائل خللی در روند آموزش ایجاد نمی کند ولی به جهت کمبود زمان تدریس طرح مسائل پیچیده توصیه نمی شود

## کار در کلاس ص ۵۳

جهت تثبیت قضایای ذکر شده در مورد حدهای بی نهایت که تا اینجا مورد بررسی قرار گرفته اند. محاسبه چند حد آمده است.

الف) در همسایگی راست ۲ حد تابع به صورت  $\frac{3}{x+}$  در می آید که معادل  $+\infty$  خواهد شد.  
ب) در همسایگی چپ ۲ صورت کسر به صورت  $(1-2)$  در خواهد آمد حد مخرج به صورت  $0^-$  تبدیل می شود که حاصل  $+\infty$  خواهد شد.

پ) در همسایگی راست یک حد تابع به صورت  $\frac{2}{x+}$  و یا  $+\infty$  تبدیل خواهد شد.  
در ادامه قضیه ۴ برای حالتی که حد صورت کسر عدد و حد مخرج کسر بی نهایت می شود مورد بررسی قرار می گیرد.

## فعالیت ص ۵۴

هدف بیان حالات عدد به علاوه بی نهایت یا عدد ضربدر بی نهایت در بحث حد است. قضیه ۵ در این رابطه بیان شده است و برای ورود آن به فعالیت صفحه ۵۴ در نظر گرفته شده است.

بند ۱-

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \text{ الف)}$$

$$(f+g)(x) = \frac{1}{x^2} + x + 1 = \frac{1+x^3+x^2}{x^2} \text{ ب)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+x^3+x^2}{x^2} = +\infty$$

حد صورت یک و حد مخرج صفر است و در همسایگی محذوف صفر مثبت است. با استفاده از قضیه ۳ حد تابع به دست می آید.

پ) نتیجه می گیریم که اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$  آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = l + \infty = +\infty$$

در بحث حد اگر عددی با بی نهایت جمع شود. حاصل بی نهایت باقی می ماند.

بند ۲-

$$f \times g = \frac{x+1}{x^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2} = +\infty \quad (\text{قضیه ۳})$$

اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L > 0$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$  آنگاه  $\lim_{x \rightarrow a} f(x).g(x) = +\infty$

به عبارت دیگر در بحث حد اگر تابعی  $+\infty$  باشد با ضرب یک عدد مثبت در بی نهایت حد همچنان بی نهایت باقی می ماند.

این نتایج در قضیه ۵ به صورت کلی بیان شده است مثال های بعد از ارائه قضیه به تفهیم بیشتر مسئله کمک می کند.

تذکر : در بیان قضیه ۵ در حالتی که  $L=0$  می شود و به حالات  $0 \times \infty$  در بحث حد می رسیم تعمداً ورود نمی کنیم و در ارزشیابی ها نیز اکیداً توصیه نمی شود و در تعارض با اهداف رسمی این درس است. تذکر : یادآوری این مطلب نیز برای دانش آموزان ضروری به نظر می رسد.

قضایا و مطالب مربوط به حدهای نامتناهی با قضایای حالت حدهای متناهی با هم تفاوت دارند زیرا نمادهای  $+\infty$  و  $-\infty$  را داریم که اعداد حقیقی نیستند بنابراین  $+\infty$  و  $-\infty$  قرینه هم نیستند لذا در محاسبه حدود نامتناهی با ساده کردن عبارات، توابع را به گونه ای می نویسیم که بتوان از قضایای ذکر شده استفاده کرد.

## کار در کلاس ص ۵۵

هدف تعمیق، تثبیت قضیه ۵ می باشد

بند ۱- اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$  آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = -\infty \quad (\text{الف})$$

ب) اگر  $L > 0$  آنگاه  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x).g(x)) = -\infty$

اگر  $L < 0$  آنگاه  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x).g(x)) = +\infty$

## بند ۲-

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = +\infty \quad (\text{الف بند ت قضیه ۳})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x^2} = +\infty \quad (\text{ب بند الف قضیه ۳})$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+2}{x^2 + 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+2}{(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{x+2} = +\infty \quad (\text{پ بند الف قضیه ۳})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 - \cos 2x}{x} = -\infty \quad (\text{ت بند ب قضیه ۳})$$

تذکر : ما در حل این کار در کلاس از قضیه ۳ بهره بردیم و می توانستیم با نوشتن  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  به صورت  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)}$  از قضیه ۵ نیز استفاده کرد.

## مجانِب قائم

### مجانِب قائم

در صفحه ۵۵ بحث مجانب ها با استفاده از دو نمودار توابع شناخته شده که در بخش های قبل مشاهده کرده اند آغاز می شود. سپس تعریف رسمی از مجانب قائم ارائه می شود. مجانب تابع  $f(x)$  خطی است که در بی نهایت دور بر منحنی نمایش  $f(x)$  مماس است. ما از ذکر این مطلب به صورت رسمی در کتاب درسی خودداری کردیم باور مفهوم مماس شدن در بی نهایت بر منحنی کمی سخت است لذا در حین تدریس شاید بتوان این مطلب را نیز یادآور شد. ما در این فصل به دو نوع مجانب قائم و افقی پرداخته ایم. عدم ورود به مجانب مایل به جهت آن است که در رسم توابع نیز توابعی که مجانب مایل دارند مورد نظر نیستند. و تا همین حد برای دانش آموزان در این سطح کافی است. هدف اصلی درک مناسبی از مفهوم مجانب و حدهای بی نهایت می باشد که به صورت شهودی در این بخش انجام می شود. هریک از حالات مختلف مجانب های قائم منحنی ها در مثال صفحه ۵۶ آمده است.

سپس به تکنیک محاسبه مجانب های قائم پرداخته می شود. اینکه در توابع کسری ریشه مخرج مجانب قائم است حرف درستی نیست ریشه مخرج با شرط آنکه در دامنه تعریف تابع باشد و صورت کسر را صفر نکند می تواند مجانب قائم باشد. در ضمن تابعی مانند  $y = \tan x$  نیز مجانب قائم دارد ولی تابع کسری

نمی‌باشد. با ذکر دو مثال و ورود به جزئیات دانش‌آموزان قادر خواهند بود مجانب‌های یک تابع را از روی ضابطه آن در صورت وجود به دست آورند.

## کار در کلاس ص ۵۷

$$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2, x = -3$$

از آنجا که  $x = 2$  ریشه صورت است و  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = +\infty$  پس  $x = -3$  مجانب قائم منحنی است.

## راه‌های حل تمرین ص ۵۸

۱

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x^2} = +\infty$$

(استفاده از بند الف قضیه ۳)

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$$

(استفاده از بند الف قضیه ۳)

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow -2} \left| \frac{5-x}{2+x} \right| = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{|5-x|}{|2+x|} = +\infty$$

(استفاده از بند الف قضیه ۳)

۲

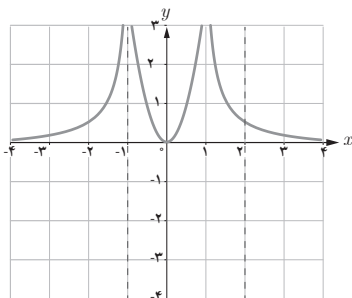
$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x}{x^2 - 4} = -\infty$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + x - 12} = -\infty$$

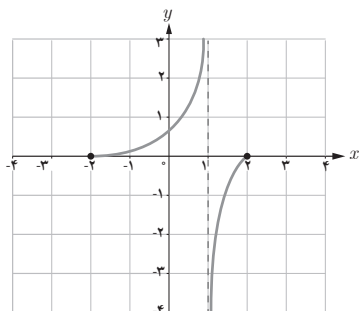
(علامت مخرج در قسمت ب) را می‌توان از طریق جدول تعیین علامت مشخص کرد)

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{9-x^2} = -\infty$$

۳ نمودار توابع زیادی را می توان رسم کرد. یکی از مسائل باز پاسخ است به عنوان نمونه :



۴



۵

الف)  $x = 3$  مجانب قائم تابع است زیرا :

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x-1}{3-x} = -\infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x-1}{3-x} = +\infty$$

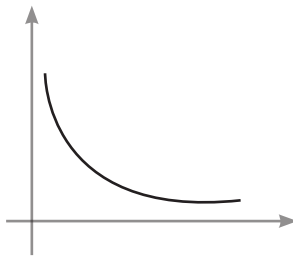
ب) ریشه های مخرج  $x = 0$  و  $x = 1$  هستند  $x = 0$  مجانب قائم نمی تواند باشد زیرا :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x-1} = -1$$

حقا  $x = 1$  مجانب قائم تابع است زیرا :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

۶ دامنه تابع  $(-\infty, 0)$  است در این حالت ضابطه به صورت  $f(x) = \frac{1}{x}$  تبدیل می‌شود که  $x = 0$  مجانب قائم آن است و نمودار تابع در مجاورت مجانب قائم آن به صورت زیر رسم می‌شود.



$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{(x-1)^2} = +\infty$$

۷

با توجه به آن که در همسایگی‌های چپ و راست  $x = 1$  حد تابع  $+\infty$  شده است فقط شکل (الف) این ویژگی را داراست.

## حد در بی نهایت

## اهداف درس

- ۱ آشنایی با مفهوم حد در بی نهایت از طریق جدول و نمودار
- ۲ آشنایی با قضایای حد در بی نهایت و استفاده از آنها در محاسبه حدود.
- ۳ آشنایی با مجانب افقی نمودار یک تابع
- ۴ آشنایی با حدود نامتناهی در بی نهایت

## روش تدریس

در این درس دانش آموزان را با مفهوم حد در بی نهایت و رفتار تابع هنگامی که متغیر بی کران افزایش یا کاهش می یابد آشنا می کنیم. در این درس از طریق نمودار تابع و جدول رفتار تابع را در بی نهایت مورد بررسی قرار می دهیم. همانند درس قبل مشهود پایه و اساس کار خواهد بود. شروع کار با یک فعالیت روی تابع شناخته شده  $y = \frac{1}{x}$  می باشد. در این فعالیت متغیر  $x$  را از سمت راست بی کران افزایش می دهیم تا رفتار تابع را مشاهده کنیم.

## تمرین ص ۵۹

- ۱ از طریق پر کردن جدول حدس می زند که با افزایش بی کران  $x$ ، مقدار تابع بی کران کاهش می یابد.

$$|f(x)| < \frac{1}{5} \Rightarrow \left| \frac{1}{x} \right| < \frac{1}{5} \Rightarrow x > 5 \quad x > 0$$

حداقل مقدار  $x$  را از ۵ باید بزرگ‌تر در نظر بگیریم.

$$\left| \frac{1}{x} \right| < \frac{1}{1^{\circ}} \xrightarrow{x >^{\circ}} \frac{1}{x} < \frac{1}{1^{\circ}} \Rightarrow x > 1^{\circ}$$

۳

$$\left| \frac{1}{x} \right| < \frac{1}{1^{\circ\circ}} \xrightarrow{x >^{\circ}} \frac{1}{x} < \frac{1}{1^{\circ\circ}} \Rightarrow x > 1^{\circ\circ}$$

۴

۵ به اگر بخواهیم فاصله  $f(x)$  تا محور  $x$  ها از عددی مانند  $k$  کمتر شود کافی است  $k > \frac{1}{k}$  در نظر گرفته شود.

پس از بررسی این فعالیت به جمع‌بندی در مورد حد تابع وقتی متغیر آن بی‌کران افزایش می‌یابد می‌رسیم و رسماً می‌نویسیم  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

## کار در کلاس ص ۶۰

هدف از این کار در کلاس رفتار تابع مورد بحث وقتی متغیر  $x$  بی‌کران کاهش می‌یابد می‌باشد و در حقیقت به تکمیل بحث قبل کمک می‌کند مشابه فعالیت دانش‌آموزان کار را پیش خواهند برد و چالش خاصی ندارد.

۱ از طریق پر کردن جدول متوجه می‌شوند که با کاهش  $x$  از طریق اعداد منفی مقدار  $f(x)$  به صفر نزدیک می‌شود.

$$|f(x)| < \frac{1}{3} \Rightarrow \left| \frac{1}{x} \right| < \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{x} < \frac{1}{3} \Rightarrow x < -3$$

۲

$$\left| \frac{1}{x} \right| < \frac{1}{1^{\circ\circ\circ}} \Rightarrow -\frac{1}{x} < \frac{1}{1^{\circ\circ\circ}} \Rightarrow x < -1^{\circ\circ\circ}$$

۳

پس از بررسی این کار در کلاس مشاهده می‌شود که اگر  $x$  به اندازه کافی کوچک‌تر (از طریق اعداد منفی) شود آنگاه  $f(x)$  را می‌توان به اندازه دلخواه به صفر نزدیک کرد سپس رسماً از نماد  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$  استفاده می‌کنیم.

در ادامه نماد  $x \rightarrow \pm\infty$  را معرفی کرده و از این به بعد می‌توان از آن استفاده کرد. هرچند که استفاده از این نماد زیاد متداول نمی‌باشد ولی به جهت خلاصه‌نویسی می‌توان قرارداد کرد هنگامی که از این نماد استفاده



می‌شود منظورمان  $x \rightarrow +\infty$  یا  $x \rightarrow -\infty$  است و بدان معنی نیست که هم‌زمان  $+\infty$  و  $-\infty$  با هم به کار می‌رود. پس از این تذکر رسماً تعریف حد در بی‌نهایت مطرح می‌شود. دانش‌آموزان باید قادر باشند نماد  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L$  را با بیان فارسی توصیف نمایند.

## کار در کلاس ص ۶۱

جهت تثبیت مطلب از طریق نمودار حد در بی‌نهایت برای دو تابع بررسی می‌شود.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -2$$

در ادامه در صفحه ۶۲ قضایای ۶ و ۷ و چند مثال در رابطه با نحوه استفاده از آنها مطرح می‌شود. در قضیه ۷ اعمال جبری روی توابع برای حد در بی‌نهایت مطرح می‌شود. مبحث بعدی در این درس حدهای نامتناهی در بی‌نهایت است. از این مبحث در رسم شاخه‌های منحنی توابع استفاده می‌کنیم. مطلب را با دو تابع خطی و درجه دوم شروع کرده و به تعریف مورد نظر می‌رسیم. سپس در کار در کلاس صفحه ۶۴ به تعمیق و ثبت مطلب پرداخته می‌شود.

## کار در کلاس ص ۶۴

۱ برای بیان مفهوم  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  می‌گوییم حد تابع  $f$  وقتی که مقادیر  $x$  از هر عدد منفی کوچک و کوچک‌تر شود بی‌کران افزایش می‌یابد مشابه این مطلب را در حالت بعدی نیز می‌توان بیان کرد.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

در ادامه فعالیتی مطرح می‌شود که آمادگی لازم برای حد توابع چندجمله‌ای می‌باشد. در این فعالیت برای تابع  $f(x) = x^2$  و حد این تابع در  $x \rightarrow \pm\infty$  به صورت شهودی و از طریق جدول مطرح می‌شود. ۱ و ۲- با تکمیل جدول مشاهده می‌شود با افزایش مقادیر  $x$  مقادیر  $f(x)$  نیز افزایش می‌یابد و با کاهش مقادیر  $x$  از طریق اعداد منفی، مقادیر  $f(x)$  نیز کاهش می‌یابد.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

پس از طرح فعالیت فوق زمینه برای طرح قضیه ۸ در حالت کلی آماده می‌شود. قضایای ۹ و ۱۰ حالات مختلفی از حد در بی‌نهایت برای یک تابع ثابت و یک تابع یا حد بی‌نهایت است که حاصل ضرب این دو تابع مورد بررسی قرار می‌گیرد که به صورت خلاصه عدد در بی‌نهایت بی‌نهایت می‌شود و برای علامت آن باید به علامت عدد و علامت بی‌نهایت توجه شود. از این قضیه در مثال‌های مختلف می‌توان استفاده کرد و با توجه به قضایای ۹ و ۱۰ به طور کلی حد یک تابع چندجمله‌ای در بی‌نهایت طرح می‌شود. سپس در کار در کلاس به یک قاعده در رابطه حد خارج قسمت دو تابع در بی‌نهایت پرداخته می‌شود.

## کار در کلاس ص ۶۶

۱

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} \quad (\text{الف})$$

با فاکتورگیری  $a_n x^n$  از جملات صورت و فاکتورگیری  $b_m x^m$  از جملات مخرج و حدگیری به عبارت

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \quad \text{می‌رسیم که معادل} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \quad \text{می‌باشد.}$$

۲ اگر  $m=0$  باشد طبیعی است که  $x^{n-m} = x^0 = 1$  و حد تابع به صورت  $\frac{a_n}{b_m}$  تبدیل می‌شود. در حالتی که

$n < m$  باشد  $n-m < 0$  و  $x^{n-m}$  وقتی  $x \rightarrow \pm\infty$  به سمت صفر میل می‌کند در نتیجه پاسخی نهایی حد به صورت

صفر خواهد بود. در حالت  $n > m$  چون  $n-m > 0$  پس  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{n-m} = \pm\infty$  خواهد شد و جواب مسئله

به علامت  $\frac{a_n}{b_m}$  بستگی دارد.

۳

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^3 - 7x + 1}{2x^3 - x + 3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{2} x = \pm\infty$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x^3 + x - 1}{6x^3 - 2x + 1} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{4x^3 + 2x - 1} = 0$$

## مجانِب افقی

ابتدا با تعریف رسمی مجانب افقی چند مثال ارائه می‌شود. با توجه به کار در کلاس صفحه ۶۶ شرط وجود یا عدم وجود مجانب افقی یک تابع را به سادگی می‌توان تحقیق نمود. محدودیتی که در این بخش وجود دارد نوع توابع است که محدود به توابع کسری شده است. البته برای رسم توابع هموگرافیک در فصل پنجم نیاز به این مطلب داریم و وارد حواشی و نکات پیچیده نخواهیم شد. البته مجانب مایل نیز از اهداف رسمی کتاب درسی نمی‌باشد و باید در تدریس به این نکته توجه شود.

## کار در کلاس ص ۶۸

هدف تحقیق شرایط مجانب افقی از طریق نمودار شهود است. در قسمت (الف) خط  $y=2$  مجانب افقی نیست زیرا شاخه‌های منحنی به این خط نزدیک نمی‌شوند. در شکل (ب) خط  $y=2$  مجانب افقی تابع است. در قسمت (پ) خط  $y=2$  با یک شاخه منحنی بر هم منطبق شده‌اند و واضح است وقتی  $x \rightarrow -\infty$  داریم  $y=2$  که شرط مجانب افقی را داراست پس خط  $y=2$  مجانب افقی تابع است. در قسمت (ت) خط  $y=2$  مجانب افقی منحنی تابع است اگرچه در یک نقطه در سمت راست نمودار را قطع کرده است در شکل (ت) نیز خط  $y=2$  مجانب افقی نمودار تابع است.

۱

(الف)  $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$   
چون  $x = -1$  ریشه صورت است پس خط  $x=1$  مجانب قائم تابع است و چون  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$  پس خط  $y=0$  مجانب افقی تابع است.

(ب) تابع  $y = x^2$  دارای مجانب افقی و قائم نمی‌باشد و شرایط تعریف را ندارد.  
(پ) خط  $x = -1$  مجانب قائم تابع است و تابع مجانب افقی ندارد چون  $x \rightarrow \pm\infty$  و  $y \rightarrow \pm\infty$  و شرایط مجانب افقی وجود ندارد [در حقیقت تابع مجانب مایل دارد].

## راه‌های حل تمرین ص ۶۹

۱

(الف) وقتی متغیر  $x$  به بی‌نهایت مثبت نزدیک می‌شود (بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود) مقادیر تابع به عدد ۲ نزدیک می‌شود.

ب) وقتی متغیر  $x$  به بی‌نهایت منفی نزدیک می‌شود (و از هر عدد منفی کوچک‌تر می‌شود) مقادیر تابع به عدد ۴ نزدیک می‌شود.

۲

الف)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

ب)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$

پ)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$

ت)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$

ث)  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$

خطوط  $x=3$  و  $x=-2$  مجانب‌های قائم و خطوط  $y=1$  و  $y=-1$  مجانب‌های افقی تابع‌اند.

۳

الف)  $+\infty$

ب)  $^\circ$

پ)  $\mp\infty$

ت)  $-\infty$

۴

الف)  $x=3$  مجانب قائم و  $y=2$  مجانب افقی است.

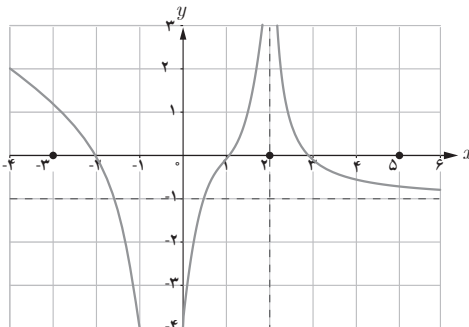
$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x-1}{x-3} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x-3} = 2$$

برای هر قسمت شرط تعریف را لازم است بررسی کنیم.

ب) خطوط  $x=2$  و  $x=-2$  مجانب‌های قائم و خط  $y=0$  مجانب افقی هستند.

پ) خطوط  $x=-1$  و  $x=1$  مجانب‌های قائم و خط  $y=-2$  مجانب افقی هستند.

ت) تابع مجانب قائم ندارد و  $y=0$  مجانب افقی تابع است.



۵

به‌عنوان نمونه می‌توان نمودارهای

روبه‌رو را رسم کرد.

## نمونه سؤالات برای ارزشیابی

۱ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

(الف) اگر برای تابع  $f$  داشته باشیم  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  تابع  $f$  در  $x=a$  حد دارد.

(ب) نمودار یک تابع می‌تواند مجانب افقی خودش را قطع کند.

(پ) نمودار یک تابع می‌تواند مجانب قائم خودش را قطع کند.

(ت) تابع  $f(x)=2$  دارای یک مجانب افقی است.

۲ نمودار یک تابع مانند  $f$  را چنان رسم کنید که در همه شرایط زیر صدق کند.

خط  $x=2$  مجانب قائم آن باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -2 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \quad \text{و} \quad f(0) = 1$$

۳ نمودار تابع  $y = \frac{x+|x|}{x-|x|}$  در مجاورت مجانب قائم خودش به چه صورتی رسم می‌شود.

۴ در نظریه نسبیت جرم ذره‌ای که با سرعت  $v$  حرکت می‌کند از رابطه  $m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$  به دست

می‌آید که در آن  $m_0$  جرم ذره در حالت سکون و  $c$  سرعت نور است. وقتی سرعت ذره به سرعت نور نزدیک

می‌شود (یعنی  $v \rightarrow c^-$ ) چه اتفاقی برای جرم ذره می‌افتد؟

۵ مجانب‌های افقی و قائم توابع زیر را به دست آورید (در صورت وجود)

(الف)  $f(x) = \frac{3x-3}{|x|-1}$

(ب)  $g(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-x-6}$

(پ)  $h(x) = \frac{x|x|+2}{x-1}$

(ت)  $t(x) = \frac{x^2+x}{x|x|-1}$

(ث)  $M(x) = \frac{3x^2}{x^2+1} - x$

(ج)  $N(x) = \frac{-x+1}{x^2-1}$

۶ حدود زیر را برای نمودار  $f$  در شکل زیر در صورت وجود حدس بزنید.

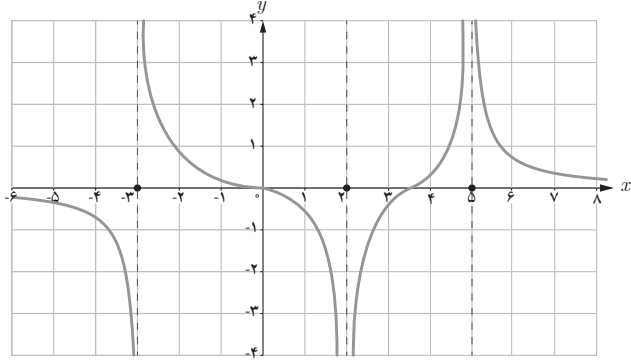
الف)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

پ)  $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$

ت)  $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$

ث)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$



۷ در مورد جواب  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k + x^2 + 1}{x^5 + 4x^2 - 1}$  بر حسب  $k$  چه می‌توان گفت.

۸ هرگاه  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^b + x^2 - 1}{3x^2 + x} = 1$  مقدارهای  $a$  و  $b$  را تعیین کنید.

۹ اگر خط  $x=3$  مجانب قائم تابع  $y = \frac{x}{x^2 + ax + b}$  باشد مقادیر  $a$  و  $b$  را تعیین کنید.

۱۰ حاصل هریک از حدود زیر را به دست آورید. (در صورت وجود)

الف)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x}{x^3 - 4x^2 + 4x}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2 + 3x + 2}$

پ)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x + 1}{(x - 2)^2}$

ت)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x^2 - x + 7}{x^2 - 3x + 4}$

ث)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \cot x$

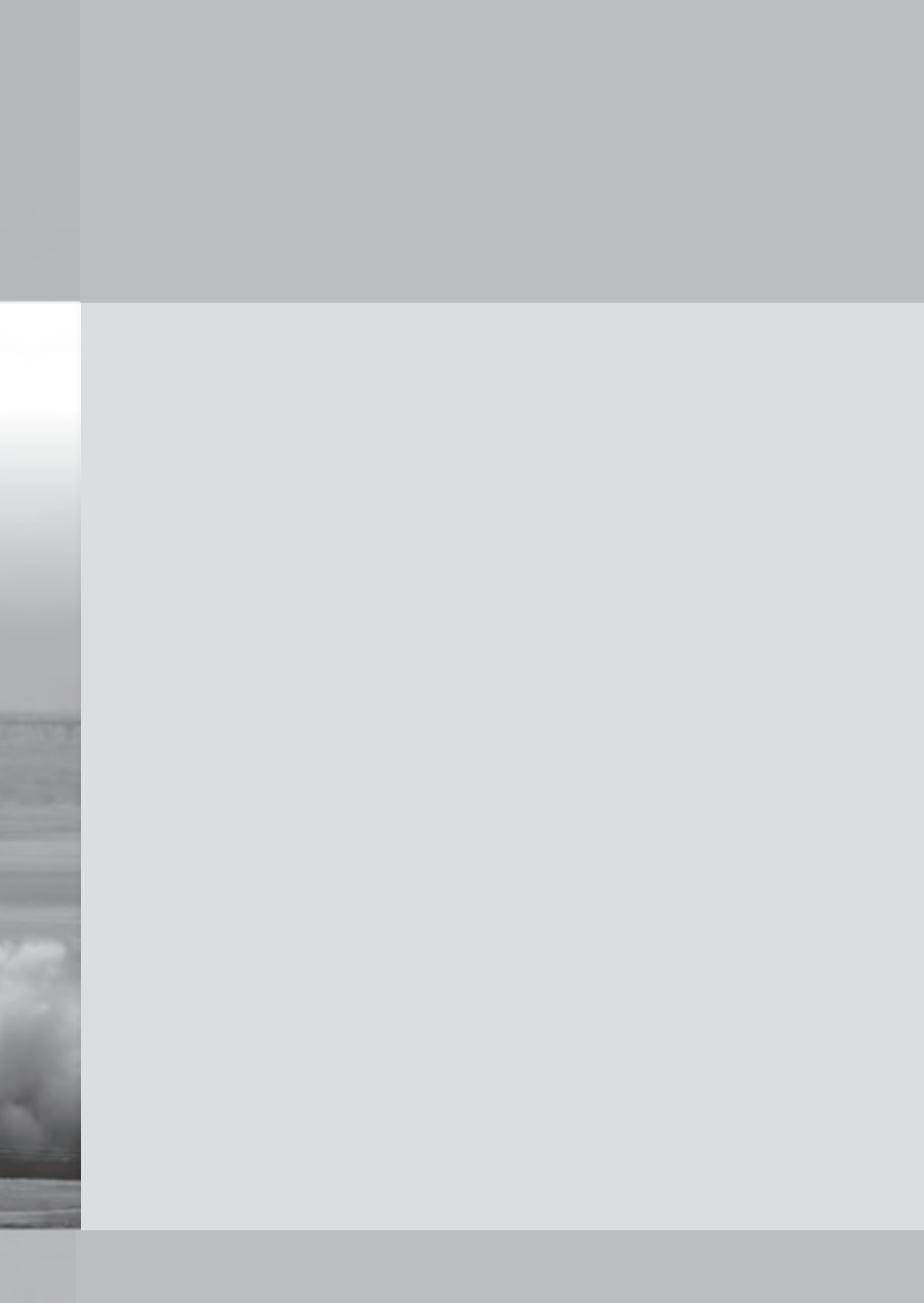
ج)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[x] + 1}{x^2 - 1}$

۱۱ اگر منحنی نمایی تابع  $y = \frac{(a^2 + 1)x^2 + 4}{x^2 + ax + 25}$  فقط یک مجانب قائم داشته باشد معادله مجانب افقی تابع را تعیین کنید.

۱۲ حدود زیر را به دست آورید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-(1-x)^3}{2x - x^2 + 5x^3}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1-x)^3 - (1+x^3)}{(x-1)^2}$





## مشتق



## فصل

۱. آشنایی با مفهوم مشتق
۲. مشتق پذیری و پیوستگی
۳. آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر



ماهواره دیر سیمرغ - پایگاه فضایی امام خمینی (ره)

مفهوم مشتق به مسئله تاریخی خط مماس در یک نقطه از منحنی و مسئله یافتن سرعت لحظه‌ای یک جسم مربوط می‌شود. امروزه مشتق در علوم مختلف کاربردهای وسیع و گسترده‌ای دارد. به‌طور مثال در صنایع فضایی، مسائلی نظیر کمینه‌سازی سوخت مصرفی، بیشینه‌سازی سرعت و کمینه‌سازی زمان سفر با مفهوم مشتق ارتباط دارند.

## مشتق

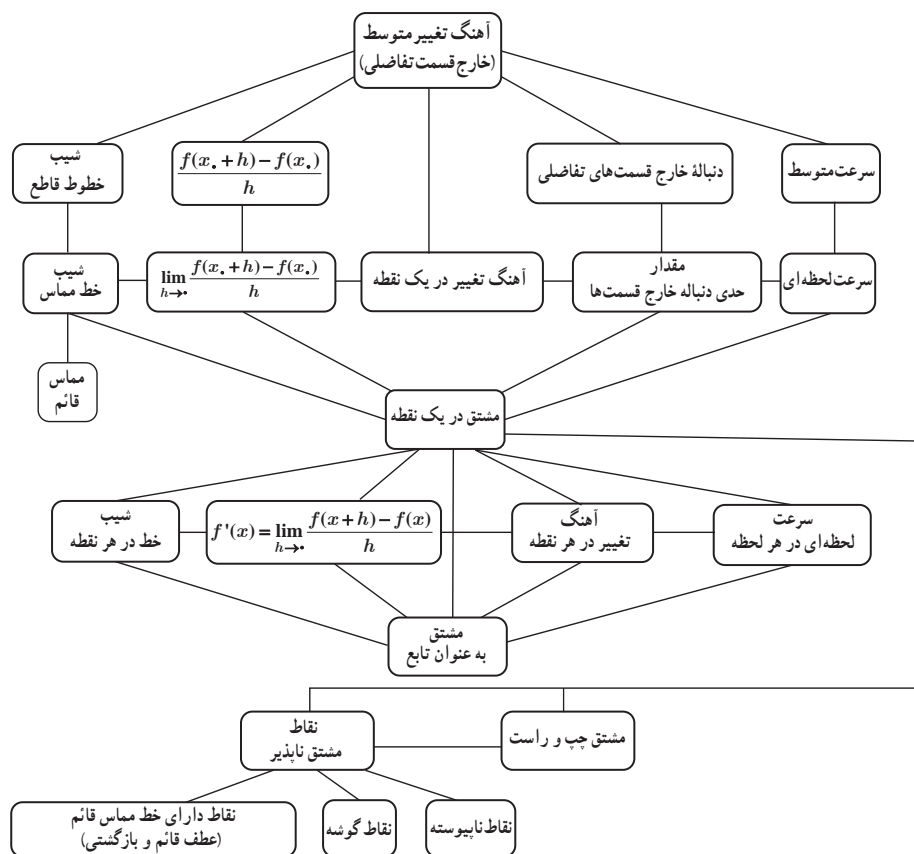
### اهداف کلی فصل ۴

- آشنایی با مفهوم مشتق در یک نقطه
- درک رابطه بین شیب خط مماس و مشتق
- بررسی نقاط مشتق ناپذیر
- درک مشتق به عنوان یک تابع
- درک آهنگ متوسط و لحظه‌ای تغییر و رابطه آن با مشتق

### نگاه کلی به فصل

مفهوم مشتق شامل سه درس است که درس اول شامل مفهوم شهودی خط مماس، مشتق در یک نقطه و معرفی بازنمایی‌های مختلف مشتق می‌باشد و درس دوم به بیان مشتق‌پذیری و معرفی مشتق به عنوان تابع می‌پردازد و در درس سوم آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر و کاربردهای آن اشاره می‌شود. اتصال بین این مفاهیم نیز حائز اهمیت است. برای ارائه هر مفهومی در کتاب علاوه بر برنامه درسی، به پشتوانه نظری و پژوهشی نیاز است. در این قسمت ابتدا نقشه مفهومی فصل (مشتق) و سپس مختصری راجع به چارچوب‌های نظری مورد استفاده در این بخش ارائه شده است.

## نقشه مفهومی



## دانشتنی‌هایی برای معلم<sup>۱</sup>

حساب دیفرانسیل یکی از بزرگترین دستاوردهای انسان است (NCTM، ۲۰۰۰؛ هاگس – هالت و دیگران، ۲۰۱۷) که نقش مهمی در تمدن بشری ایفا کرده است. یکی از مباحث حساب دیفرانسیل که بسیار حائز اهمیت می‌باشد، مشتق<sup>۲</sup> است. این مفهوم در کتاب‌های جدید ریاضی در پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه ارائه می‌گردد. تحقیقات نشان می‌دهند که مفهوم مشتق یکی از مفاهیم مشکل برای دانش‌آموزان و دانشجویان می‌باشد و علت این امر، پیچیدگی تعریف و بازنمایی‌های آن است (تامپسون، ۱۹۹۴؛ زندیه، ۲۰۰۰). مطالعات زیادی در مورد بررسی تفکر دانش‌آموزان در ارتباط با مفاهیم حساب دیفرانسیل، شامل مشتق انجام شده است (به‌طور مثال، اوهرتمن و دیگران، ۲۰۰۸؛ بری و نیمن، ۲۰۰۳؛ سلدن. جی، سلدن. ای، هاک، و میسن، ۲۰۰۰). مشتق، ابتدا به کار برده شده، سپس کشف و توسعه یافته و در نهایت تعریف شده است (گراینر، ۱۹۸۳). سیر تاریخی استفاده از مشتق تا تعریف آن بیش از ۲۰۰ سال طول کشیده است. فرما<sup>۳</sup> در ابتدا از آن استفاده می‌کرد، نیوتن<sup>۴</sup> و لایب‌نیتز<sup>۵</sup> آن را کشف نمودند، تیلور، اولر و مک لورن آن را توسعه داده، لاگرانژ آن را نامگذاری و تعیین نمود و در پایان کوشی<sup>۶</sup> و ویراشتراس<sup>۷</sup> آن را تعریف کردند (گراینر، ۱۹۸۳). از طرفی مشتق یکی از مفاهیم حساب دیفرانسیل است که در علوم مختلف مهندسی، فیزیک، شیمی، علوم انسانی و اقتصاد و غیره کاربرد و اهمیت دارد (رودرا و گودهرت، ۲۰۱۰).

از جمله اهداف این فصل آن است که مفاهیم ریاضی جدید به کمک مفاهیم قبلی در کتاب‌های درسی ساخته شوند. در این راستا، چگونگی ارائه مبحث مشتق در کتاب‌های درسی حائز اهمیت است؛ زیرا یکی از شاخصه‌های اصلی تدریس معلمان کتاب‌های درسی هستند، بنابراین نحوه بیان مفهوم‌سازی مشتق در کتاب‌ها مهم است. همچنین سعی شده است که از شهود نهایت بهره را ببریم. از مفاهیم پایه در این بررسی مفهوم فرایند – شی<sup>۸</sup> است، که در ادامه، از منظر اسفارد<sup>۹</sup> (۲۰۰۸) به آن می‌پردازیم.

### فرایند و شی از دیدگاه اسفارد (۲۰۰۸)

نظریه فرایند و شی توسط افراد مختلفی به‌صورت‌های گوناگون تعریف شده است. یکی از این نظریه‌ها، نظریه کاربردی شی<sup>۱۰</sup> انگاری<sup>۱۱</sup> اسفارد (۲۰۰۸) می‌باشد. بر اساس این نظریه یک دوگانگی فرایند – شی ذاتی در بیشتر مفاهیم ریاضی وجود دارد. اساس نظریه این است که در ابتدا مفهوم عملیاتی (فرایند محور)

۱- مطالب این قسمت برگرفته از مقاله‌های شماره ۱ تا ۳ مراجع است.

۲- Derivative

۳- Fermat

۴- Newton

۵- Leibniz

۶- Cauchy

۷- Weierstrass

۸- Process\_object

۹- Sfard

۱۰- Reification

ایجاد می‌شود و پس از آن از طریق شیئی انگاری فرایندها، اشیای ریاضی (مفاهیم ساختاری) ایجاد می‌گردند. فرایندهای پویا، عملیاتی هستند که روی اشیای ثابت و ایستای گذشته عمل می‌کنند. هر فرایندی که روی یک شیئی، عمل می‌کند؛ خود از عمل، توسط فرایند دیگر به وجود آمده است. این فرایند زنجیر مانند، زوج‌های فرایند - شیئی نامیده می‌شوند. اسفارد از سه مرحله فرایند برای رشد مفهوم صحبت می‌کند (شکل ۲-۱):

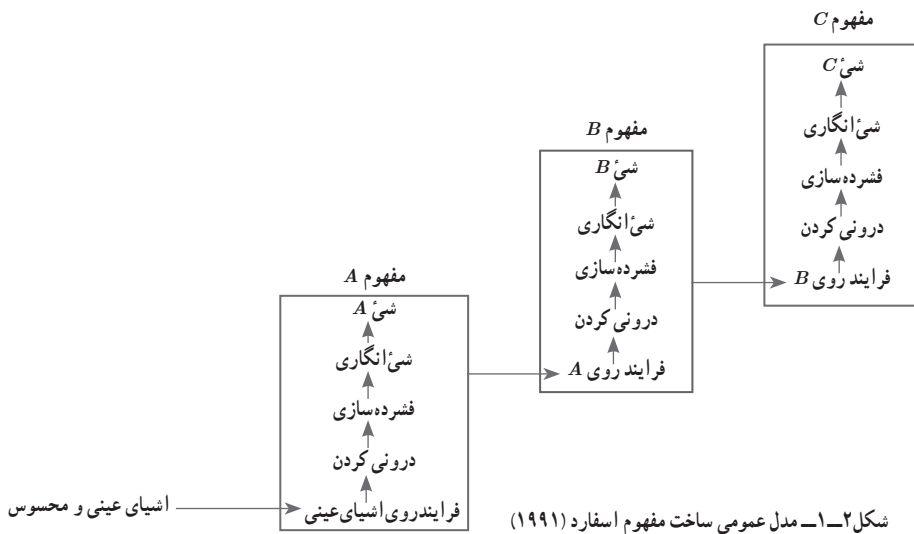
**مرحله درونی کردن<sup>۱</sup>:** فرایند یا عملیاتی که یک شخص روی یک شیئی ذهنی آشنا و در دسترس انجام می‌دهد و قادر به تکرار آن باشد، گوییم آن را درونی کرده است (زمانی اتفاق می‌افتد که شخص بین فرایندهای مرتبط گام بردارد).

**مرحله فشرده سازی یا جمع بندی<sup>۲</sup>:** اگر یادگیرنده قادر باشد فرایند را در نظر بگیرد بدون آنکه در واقعیت اتفاق افتاده باشد گوییم آن را فشرده سازی و خلاصه کرده است (زمانی اتفاق می‌افتد که شخص فرایند را به عنوان کل در نظر بگیرد و بتواند به عنوان یک زیرفرایند در فرایند دیگر به کار برد).

**مرحله شیئی انگاری:** زمانی که یادگیرنده از اشیای آشنا به یک نگاه کلی و جدید برسد به طوری که بتواند با آن دست‌ورزی کند، به مرحله شیئی انگاری رسیده است. در این حالت فرایند، تبدیل به یک شیئی ساختاری ایستا می‌شود و خود پایه‌ای برای فرایند پیشرفته‌تر بعدی می‌گردد (زمانی اتفاق می‌افتد که فرایندها به طور ساختاری به عنوان یک شیئی در نظر گرفته شوند).

شکل ۲-۱، مراحل ساخت یک مفهوم از دیدگاه اسفارد شامل درونی کردن، فشرده سازی و شیئی انگاری را نشان می‌دهد و ساختار زنجیر مانند فرایند - شیئی را در هر مرحله نمایان ساخته است. به عنوان مثال، می‌توان روند توسعه ساخت مفهوم تابع را نام برد. در ابتدا شخص با تناظر کردن دو شیئی، آشنا می‌شود. به عنوان نمونه هر شخص یک کد ملی دارد یا در هر لحظه دماسنج یک دما را نشان می‌دهد. سپس این تناظر را به عنوان زوج مرتب (شیئی) در نظر می‌گیرد، (شخص، کد ملی)؛ کار با زوج‌های مرتب به عنوان اشیای و ادامه مراحل درونی کردن و فشرده سازی با برقراری رابطه بین آنها دنبال می‌شود، سپس مفهوم رابطه درک می‌شود. فرایند نگاشتن عضوی از دامنه به درون عضوی از برد با این شرط که یک عضو از دامنه به دو عضو از برد نگاشته نشود را تابع به عنوان فرایند نامیم. اعمال روی تابع و دست‌ورزی با آن به شیئی تبدیل می‌شود. مجموعه توابع را نیز می‌توان به عنوان یک خانواده توابع در نظر گرفت که منجر به جبر توابع می‌شوند. به عنوان مثالی دیگر، خارج قسمت تفاضلی را به عنوان اندازه‌آهنگ متوسط متغیر وابسته نسبت به متغیر مستقل در نظر می‌گیریم. محاسبه نسبت تفاضلات، به عنوان فرایند  $A$  می‌باشد. با انجام چندین محاسبه برای مقادیر مختلف و جمع‌بندی کردن آن، به عنوان یک شیئی (شیئی  $A$  همان نسبت تفاضلات به عنوان عدد است) خلاصه می‌شود. این شیئی در فرایند دوم یعنی فرایند حدگیری مورد استفاده قرار می‌گیرد.

فرایند حدگیری در این مرحله، شامل تجزیه و تحلیل یک دنباله از آهنگ‌های متوسط تغییرات وقتی که تفاضل مخرج به سمت صفر میل کند، می‌باشد. نماد لایب نیتسی آن نیز به صورت  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  است. فرایند حدگیری به عنوان آهنگ آنی تغییرات، خلاصه شده و با  $\frac{dy}{dx}(x_0)$  نشان می‌دهیم (شیء  $B$ ). فرایند خلاصه شده آهنگ آنی تغییرات در هر مقدار ورودی به عنوان یک شیء در ساخت تابع مشتق مورد استفاده قرار می‌گیرد. تابع فرایند در این مرحله، تغییرات هم‌زمان مقادیر ورودی و خروجی یا مقادیر آهنگ آنی تغییر خواهد بود و با نماد  $\frac{dy}{dx}(x)$  نشان می‌دهیم (شیء  $C$ ).



زندیه (۱۹۹۷، ۲۰۰۰) چارچوبی برای درک دانش‌آموزان از مشتق ارائه نموده است که در قسمت بعد به آن می‌پردازیم.

### چارچوب زندیه برای درک مفهوم مشتق

زندیه (۱۹۹۷) نشان داد که درک اساسی که منجر به مفهوم مشتق می‌شود در طی بازنمایی‌های مختلف و تکالیف متنوع در زمینه‌های حساب دیفرانسیل محقق می‌شود. زندیه (۲۰۰۰) چارچوبی برای تجزیه و تحلیل درک دانش‌آموزان از مشتق ارائه داده است. دو مؤلفه اصلی چارچوب، یکی بازنمایی‌های چندگانه (زمینه‌ها)<sup>۲</sup> و دیگری لایه‌هایی از زوج‌های فرایند - شیء<sup>۳</sup> می‌باشد که در ادامه هر کدام به اختصار

توضیح داده می‌شوند. بازنمایی‌های چندگانه مفهوم مشتق عبارت‌اند از :

الف) نموداری<sup>۱</sup> : به عنوان شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه؛

ب) کلامی<sup>۲</sup> : به عنوان آهنگ تغییر لحظه‌ای؛

ج) فیزیکی<sup>۳</sup> : به عنوان سرعت (شتاب و در حالت کلی حرکت)؛

د) نمادین<sup>۴</sup> : به عنوان حد خارج قسمت تفاضلی.

لایه‌های مشتق که هر کدام می‌توانند در نقش فرایند و شیء باشند به صورت زیر است :

نسبت	فرایند، فرایند تقسیم صورت کسر به مخرج کسر.
	شیء، یک جفت عدد صحیح و یا خروجی فرایند تقسیم.
حد	فرایند، فرایند نزدیک شدن به یک مقدار.
	شیء، مقدار حد.
تابع	فرایند، تناظر بین دو مجموعه ناتهی.
	شیء، مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب.

جدول ۱-۲، چارچوب درک دانش‌آموزان از مفهوم مشتق را که زندیه (۲۰۰۰) ارائه داد، به همراه بازنمایی‌ها و لایه‌های آن نشان می‌دهد.

جدول ۱-۲- چارچوب درک مفهوم مشتق زندیه (۱۹۹۷، ۲۰۰۰)

غیره	نمادین	فیزیکی	کلامی	نموداری	زمینه‌ها لایه‌ها
	خارج قسمت تفاضلی	سرعت	آهنگ	شیب	(فرایند - شیء)
					نسبت
					حد
					تابع

### چارچوب نظری اسفارد

از چارچوب نظری مورد استفاده در ارائه مفهوم مشتق در این کتاب، چارچوب اسفارد، همان رویکرد گفتمان شناختی<sup>۵</sup> در متن‌های کتاب حساب دیفرانسیل است. رویکرد گفتمانی بر این پایه استوار است که

۱- Graphically

۲- Verbally

۳- Physically

۴- Symbolically

۵- Commognitive approach

تفکر نوع معینی از گفتمان با خود یا دیگران است. گفتمان شناختی از دو کلمه گفتمان<sup>۱</sup> و شناخت<sup>۲</sup> تشکیل شده‌اند که هر دو با هم یک پدیده را توصیف می‌کنند (اسفارد، ۲۰۰۸). نظریه گفتمان شناختی یک نظریه منسجم و دقیق برای تفکر درباره تفکر، مبتنی بر تجزیه و تحلیل گفتمان کلاسیک است (یاکل، ۲۰۰۹). نظریه گفتمان شناختی کاربرد زیادی در تجزیه و تحلیل توصیفی و کمی محتوای کتاب‌ها دارد. این نظریه شامل ساختارهایی مانند کنایه<sup>۳</sup>، تفکر و گفتمان است و گفتمان شناختی به عنوان نتیجه‌ای از ارتباط بین فردی میان فرایند گفتمان و شناخت است. گفتمان شناختی دارای پنج خاصیت استدلال<sup>۴</sup>، انتزاع یا تجریدسازی<sup>۵</sup>، عینی‌سازی<sup>۶</sup>، ذهنی‌سازی<sup>۷</sup> و خودآگاهی<sup>۸</sup> می‌باشد. از طرفی ریاضی دارای سیستمی شامل اشیای گفت‌وگو به همراه خود گفت‌وگو است که وقتی اشیای جدید یکی پس از دیگری اضافه شوند از درون بی وقفه رشد می‌کند و گسترش می‌یابد (اسفارد، ۲۰۰۸) و به این ترتیب یک مفهوم، ساخت و گسترش می‌یابد. رویکرد گفتمان شناختی مبانی اساسی را از بین چهار مشخصه گفتمان شرح می‌دهد:

### استفاده از کلمات – واسطه‌های تصویری – روال‌ها یا روتین‌ها – روایت‌های تأییدی

**۱ استفاده از کلمات<sup>۹</sup>:** استفاده از کلمات، کلید مهمی در تدریس و یادگیری حساب دیفرانسیل می‌باشد. گفتمان ریاضی در حساب، گفتمانی است که در آن از جملات تکنیکی در متن‌ها استفاده می‌کنیم. برای نمونه روش استفاده آموزشگران از کلمات برای توضیح معنی حد و مشتق مهم است زیرا دانش‌آموزان نیاز به فرصت برای بیان خود و حس یکپارچه‌ای از مفاهیم دارند.

**۲ واسطه‌های تصویری<sup>۱۰</sup>:** واسطه‌های تصویری اشاره به ابزارهای غیرکلامی گفتمان دارند. در مباحث حساب دیفرانسیل، واسطه‌های تصویری اغلب با نمودارها، اشکال، جدول‌ها، علائم نمادین مشخص می‌گردند.

**۳ روال‌ها یا روتین‌ها<sup>۱۱</sup>:** روال‌ها همان الگوهای تکراری هستند که در سخنرانی‌های کلامی و واسطه‌های تصویری و روایت‌های تأییدی یافت می‌شوند.

**۴ روایت‌های تأییدی<sup>۱۲</sup>:** روایت‌های تأییدی یا تصدیقی اظهاراتی هستند که به عنوان صحبت‌های درست در نظر گرفته می‌شوند. در گفتمان ریاضی، روایت‌های تأییدی، جملاتی از مفاهیم ریاضی مانند تعاریف، قضایا یا توجیه‌ها می‌باشد (جدول ۱ و جدول ۲ را مشاهده کنید). این رویکرد تشریح می‌کند که اشیای ریاضی با ماهیت‌های ملموس درک‌پذیر فهمیده می‌شوند؛ مانند کلمات و واسطه‌های تصویری که اسفارد آنها را معنا بخشی<sup>۱۳</sup> می‌نامد. یک شخص، یک کلمه یا نماد ریاضی را با اشیای ملموس و قابل

۱- Communication

۲- Cognition

۳- Metaphor

۴- reasoning

۵- abstracting

۶- objectifying

۷- subjectifying

۸- consciousness

۹- Word- use

۱۰- Visual mediators

۱۱- Routines

۱۲- Endorsed narratives

۱۳- Realizations



دسترس درک می‌کند. برای نمونه یک شخص، کلمه تابع را با نمودار یا جدول درک می‌کند (اسفارد، ۲۰۰۸، ص ۱۵۴).

جدول ۱- اجزای گفتمان ریاضی در رویکرد گفتمان شناختی (اسفارد، ۲۰۰۸)

توصیف‌ها	اجزا
استفاده از کلمات برای معنی کردن اشیای ریاضی	استفاده از کلمات (Word use)
روشهای غیر کلامی گفتمان	واسطه‌های تصویری (Visual Mediators)
الگوهای تکراری خوش تعریف	روال‌ها یا روتین‌ها (Routines)
اظهاراتی که سخنرانان به عنوان عبارات درست تأیید می‌کنند.	روایت‌های تأییدی یا تصدیقی (Endorsed Narratives)

علاوه بر مشخصه‌های چارچوب گفتمان شناختی، این چارچوب شامل اشیای مختلفی از گفتمان ریاضی مانند : نشانگرها یا دلالت‌گرها<sup>۱</sup>، درخت‌های معنابخشی<sup>۲</sup>، مفاهیم<sup>۳</sup>، اشیای اولیه<sup>۴</sup> و اشیای استدلالی<sup>۵</sup> است.

### گفتمان ریاضی

گفتمان ریاضی دارای اجزایی است که عبارت‌اند از :

اشیای اولیه : هر موجود درک‌پذیر و قابل دسترسی که مستقل از گفتمان‌های انسانی وجود دارد و شامل چیزهایی است که ما می‌توانیم ببینیم و لمس کنیم (اشیای مادی و تصاویر).

اشیای استدلالی : در فرایند نام‌گذاری صحیح به‌وجود می‌آیند : دادن اسم یا عنصر نمادین مشابه به یک شیء خاص. در این فرایند یک زوج ( اسم یا ضمیر، شیء اولیه معین) ایجاد می‌شود. اولین عنصر از زوج نشانگر این است که در برقراری ارتباط با شیء دیگر زوج استفاده می‌شود و به عنوان نشانگر معنابخشی شمرده می‌شود (اسفارد، ۲۰۰۸).

درخت معنابخشی : مجموعه سلسله مراتب سازماندهی شده از تمامی مفاهیم نشانگرهای داده شده همراه با معنا بخشی این مفاهیم که به خوبی نشانگرهای قبلی خود را معنا بخشی کنند و مفاهیمی برای نشانگرهای بعدی باشند. درخت‌های معنا بخشی و در نتیجه اشیای ریاضی دارای ساختار شخصی هستند و اطلاعات ارزشمندی در مورد گفتمان شخص می‌دهند. در این بررسی فرایندی که مشتق یک تابع به صورت شیء در نظر گرفته می‌شود را فرایند مشتق و شیئی که فرایند مشتق روی آن اعمال می‌شود شیء اولیه و نتیجه فرایند مشتق را شیء نهایی می‌نامیم.

۱- signifiers

۲- realization trees

۳- realisations

۴- primary objects

۵- discursive objects

رویکرد گفتمان شناختی تشریح می‌کند که اشیای ریاضی با ماهیت‌های ملموس درک‌پذیر فهمیده می‌شوند؛ مانند کلمات و واسطه‌های تصویری که اسفارد آنها را معنابخشی می‌نامد. معنابخشی به جای درک و فهم استفاده می‌شود و زمانی به کار می‌بریم که یک مفهوم مشکل ریاضی را با استفاده از کلمات و تصاویر به مفاهیم ساده‌تر و قابل درک به کمک اشیای ریاضی تبدیل کنیم.

جدول ۲- کلمات و واسطه‌های تصویری به عنوان معنا بخشی‌های مشتق

واسطه‌ها	اشیای اولیه	فرایند حد	اشیای نهایی
نمادین	$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$	$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$
عددی	$\frac{42-35}{3-1}$	دنباله‌ای از چند عدد	عدد
نموداری	(خط قاطع)	(خطوط قاطع)	(خط مماس)

نماد  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$  به صورت فرایند و شی هر دو بازنمایی می‌شود، این دوگانگی اغلب منجر به مشکل شدن درک نماد به عنوان شی برای دانش‌آموزان می‌شود (زندیه، ۲۰۰۰).

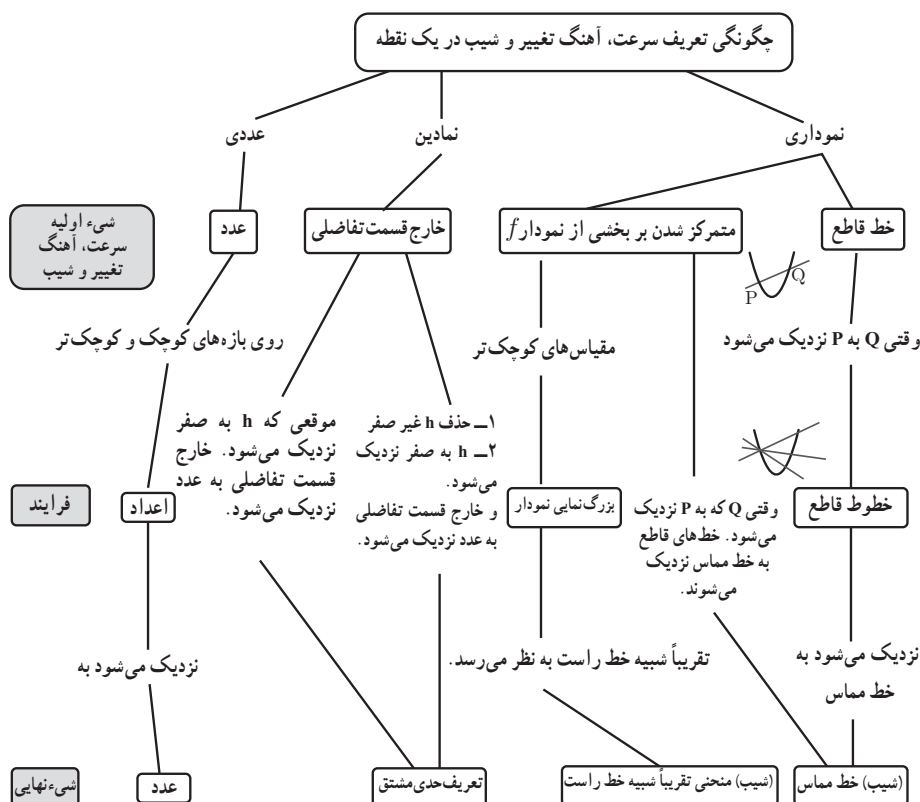
### درخت معنا بخشی مشتق در یک نقطه

کتاب حسابان ۲، حدوداً ۱۵۰ صفحه است که ۷۳ صفحه آن (معادل ۴۹٪ کتاب) به مشتق و کاربرد آن اختصاص یافته است. در این کتاب از ۵۵ آیم در مورد مشتق در یک نقطه، ۲۷ آیم نموداری و ۱۷ آیم نمادین و ۱۱ آیم عددی می‌باشند که از آنها، ۳۴ آیم به فرایند حد پرداخته می‌شوند، ۱۹ آیم (نموداری) و ۱۵ آیم (نمادین).

جدول موضوعات و تعداد صفحات و درصد اختصاص یافته به مشتق در کتاب

موضوع	تعداد صفحه	درصد از مبحث مشتق
شیب و خط مماس	۱۲	۱۶٪
مشتق پذیری و پیوستگی	۶	۸٪
تابع مشتق	۵	۷٪
مشتق تابع مثلثاتی و تابع مرکب - مشتق پذیری روی یک بازه	۷	۹٪
آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه ای تغییر	۹	۱۲٪
کاربرد مشتق	۳۴	۴۶٪

درخت معنا بخشی مشتق در یک نقطه، در کتاب در ادامه نمایش داده شده است.



## برخی از بدفهمی‌های رایج در مورد مشتق

یکی از عوامل مؤثر در طراحی این فصل، مطالعات انجام شده در مورد آموزش مفهوم مشتق بوده است. در این مطالعات برخی بدفهمی‌های رایج در مورد مفهوم مشتق مشاهده گردیده است که برخی از آنها به شرح زیر است. اطلاعات بیشتر در مراجع آمده است.

۱ عدم توجه به فرایند حدی: دانش‌آموزان صرفاً به نوشتن خارج قسمت تفاضلی بسنده می‌کنند و توجهی به مفهوم حدگیری ندارند. به عنوان نمونه ممکن است بنویسند:  $f'(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ .

۲ درک نادرست از تعریف نمادین: برخی دانش‌آموزان تعریف مشتق در یک نقطه را به این صورت معرفی می‌کنند:  $f'(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ . این شخص علاوه بر اینکه مفهوم حدی را نادیده گرفته است، تفاوتی بین مشتق در یک نقطه و مشتق به عنوان تابع نیز قائل نیست.

۳ درک ناقص یا اشتباه از مشتق: برخی دانش‌آموزان مشتق را به نوعی کم کردن توان معرفی می‌کنند یعنی  $f(x) = x^3 \rightarrow f'(x) = 3x^2$ .

۴ مشتق‌گیری از عبارات در توابع چند ضابطه‌ای بدون فراهم بودن شرایط.

۵ در توابعی که شامل چند متغیر هستند و برخی متغیرها ثابت فرض می‌شوند، به نادرستی مشتق گرفته می‌شود.

۶ در محاسبه تعبیر مشتق در یک نقطه در زندگی واقعی برداشت‌های متناقضی دارند.

۷ در مقایسه شیب‌های با مقادیر منفی اشتباهات چشم‌گیری دیده می‌شود.

۸ درک درستی از تقریب در محاسبات مربوط به شیب ندارند.

## آشنایی با مفهوم مشتق

هدف کلی: درک مفهوم مشتق

### اهداف جزئی

- ۱ یادآوری مفهوم شیب خط
- ۲ آشنایی با مفهوم خط مماس به صورت شهودی
- ۳ محاسبه شیب خط مماس با جدول مقادیر خارج قسمت تفاضلی و نمودار
- ۴ آشنایی با پیدا کردن معادله خط مماس
- ۵ محاسبه مشتق به روشی دیگر

### پیش نیازها

- ۱ آشنایی با روش های حدگیری
- ۲ آشنایی با محاسبه شیب

### روش تدریس

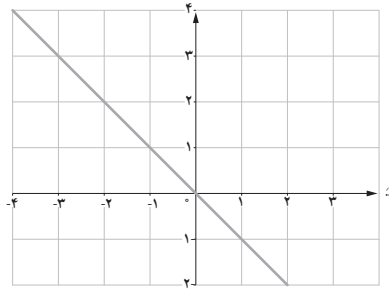
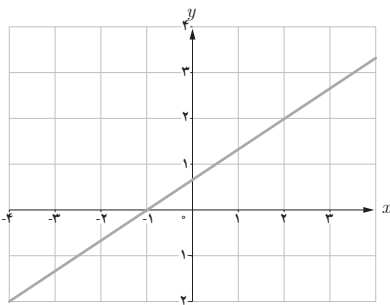
با تکیه بر مفهومی آشنا به نام شیب یک خط، تدریس آغاز می شود. مقایسه شیب های مختلف، به ویژه تغییرات شیب ها وقتی که مثبت یا منفی هستند و مقادیر آنها مفید و آموزنده است. سپس شیب خط مماس بر منحنی به طور شهودی ارائه می گردد و در ادامه به صورت دقیق تر و در یک فرایند حدی، شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه تعریف می گردد و مفهوم مشتق تابع در یک نقطه از آن استخراج می گردد.

هدف این فعالیت، یادآوری مفهوم شیب خط، محاسبه و مقایسه شیب خطوط با یکدیگر است. به دانش‌آموزان اجازه دهید تا فعالیت را انجام دهند و در انتها مفاهیم را دوره نمایند.

۱ شیب هر یک از خط‌های داده شده را به دست آورید و مشخص کنید که کدام یک مثبت و کدام یک منفی است؟

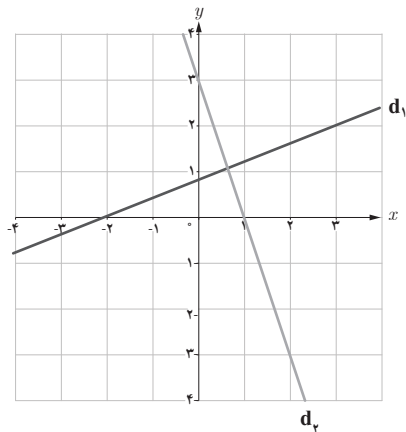
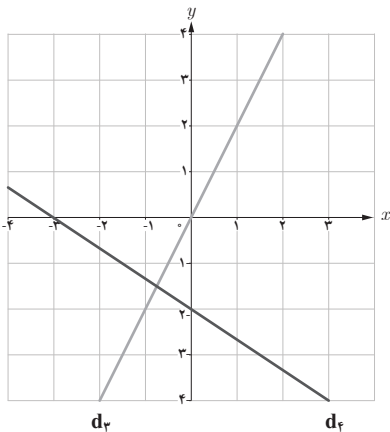
$$m = \frac{2}{3}$$

$$m = -1$$



خط	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$
شیب	$\frac{2}{5}$	-۳	۲	$-\frac{2}{3}$

۲ با توجه به جدول روبه‌رو، نمودار مربوط به خط‌های  $d_1$ ،  $d_2$ ،  $d_3$  و  $d_4$  را روی شکل مشخص کنید.



## توصیه آموزشی

در صورت لزوم شیب‌های دیگر را مطرح کنید و از دانش‌آموزان بخواهید که آنها را به دست آورند. به ویژه مقایسه شیب‌های منفی مختلف ضروری و آموزنده است.

تصاویر صفحه ۷۳ صرفاً برای آشنایی اولیه با خط مماس می‌باشد. مثال‌هایی برای اینکه چه خطوطی را به عنوان مماس می‌شناسیم و چه خطوطی را خط مماس در نظر نمی‌گیریم. همچنین خط مماس لزوماً نبایستی نمودار را در یک نقطه قطع کند و یا هرخطی که در یک نقطه نمودار را قطع کند، لزوماً خط مماس نیست.

## فعالیت ص ۷۴

هدف از ارائه این فعالیت درک شهودی خط مماس به کمک نمودار و با استفاده از حد خطوط قاطع است. ارائه مفهوم مشتق بدون فراهم ساختن مقدمات آن، فرصت یادگیری مناسب را از دانش‌آموزان می‌گیرد. باید به دانش‌آموزان فرصت داده شود تا تغییرات خطوط قاطع و حالت‌های حدی را به‌طور شهودی بررسی نمایند.

## فعالیت ص ۷۵

هدف از این فعالیت، گذر از درک شهودی خط مماس و انجام محاسبات عددی و رسیدن به دقت می‌باشد. همان‌طور که در مبانی نظری نیز بیان شد، مشتق بازنمایی‌های مختلفی دارد و یکی از آنها عددی و نموداری است. در این فعالیت از دانش‌آموزان می‌خواهیم حدس بزنند، محاسبات انجام دهند، فرایند حدی را مشاهده کنند و در نهایت استدلال نمایند. چالش دیگری که در اینجا مطرح است بحث ورود متغیر می‌باشد که با انجام محاسبات و توجه به تغییرات متغیر طول‌ها، تأثیرات آن بر تغییرات عرض‌ها را متوجه شوند.

بازه $[a, b]$	$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
$[۲, ۲/۴]$	$\frac{f(۲/۴) - f(۲)}{۲/۴ - ۲} = \frac{-(۲/۴)^۲ + ۱ \circ (۲/۴) + (۲)^۲ - ۱ \circ (۲)}{۲/۴ - ۲} = \frac{۲/۲۵}{\circ/۴} = ۵/۶$
$[۲, ۲/۳]$	$\frac{f(۲/۳) - f(۲)}{۲/۳ - ۲} = \frac{-(۲/۳)^۲ + ۱ \circ (۲/۳) + (۲)^۲ - ۱ \circ (۲)}{۲/۳ - ۲} = \frac{۱/۷۱}{\circ/۳} = ۵/۷$
$[۲, ۲/۲]$	$\frac{f(۲/۲) - f(۲)}{۲/۲ - ۲} = \frac{-(۲/۲)^۲ + ۱ \circ (۲/۲) + (۲)^۲ - ۱ \circ (۲)}{۲/۲ - ۲} = \frac{۱/۱۶}{\circ/۲} = ۵/۸$
$[۲, ۲/۱]$	$\frac{f(۲/۱) - f(۲)}{۲/۱ - ۲} = \frac{-(۲/۱)^۲ + ۱ \circ (۲/۱) + (۲)^۲ - ۱ \circ (۲)}{۲/۱ - ۲} = \frac{\circ/۵۹}{\circ/۱} = ۵/۹$
$[۲, ۲/\circ ۱]$	$\frac{f(۲/\circ ۱) - f(۲)}{۲/\circ ۱ - ۲} = \frac{-(۲/\circ ۱)^۲ + ۱ \circ (۲/\circ ۱) + (۲)^۲ - ۱ \circ (۲)}{۲/\circ ۱ - ۲} = \frac{\circ/\circ ۵۹۹}{\circ/\circ ۱} = ۵/۹۹$
$[۲, ۲/\circ \circ ۱]$	$\frac{f(۲/\circ \circ ۱) - f(۲)}{۲/\circ \circ ۱ - ۲} = \frac{-(۲/\circ \circ ۱)^۲ + ۱ \circ (۲/\circ \circ ۱) + (۲)^۲ - ۱ \circ (۲)}{۲/\circ \circ ۱ - ۲} = \frac{\circ/\circ \circ ۵۹۹۹}{\circ/\circ \circ ۱} = ۵/۹۹۹$
$\vdots$	$\vdots$
$[۲, ۲+h]$ (یک عدد خیلی کوچک و مثبت است)	$\frac{f(۲+h) - f(۲)}{(۲+h) - ۲} = \frac{-(۲+h)^۲ + ۱ \circ (۲+h) + (۲)^۲ - ۱ \circ (۲)}{h}$ $= \frac{-h^۲ + ۶h}{h} = -h + ۶$



## توصیه آموزشی

اجازه دهید دانش‌آموان محاسبات را انجام دهند و در نتیجه‌گیری به آنها کمک کنید تا خط مماس را به خوبی درک کنند. در صورت لزوم می‌توانند بازه‌های دیگری را نیز انتخاب کنند و محاسبات را انجام دهند. معلمان عزیز می‌توانند در این فعالیت این دو سؤال را از دانش‌آموزان پرسند و یا به بحث بگذارند.

الف) به نظر شما مقادیر خارج قسمت تفاضلی به چه عددی نزدیک می‌شوند؟  
ب) آیا هر قدر که بخواهیم می‌توانیم خارج قسمت تفاضلی را به آن عدد (۶) نزدیک کنیم؟ اگر پاسخ مثبت است، به چه شرطی؟

## کار در کلاس ص ۲۸

معادله خط مماس بر منحنی تابع  $y = x^2 + 3$  را در نقطه‌ای به طول ۲- بنویسید.  
حل : نقطه تماس  $A(-2, 7)$  می‌باشد و برای پیدا کردن شیب خط مماس از رابطه زیر استفاده می‌کنیم :

$$m = f'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2+h)^2 + 3 - (-2)^2 - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h - 4) = -4$$

بنابراین معادله خط مماس به صورت  $y = -4x - 1$  است  $\rightarrow y - 7 = -4(x + 2)$

## کار در کلاس ص ۸۰

اگر  $f'(a)$  موجود باشد، ثابت کنید.

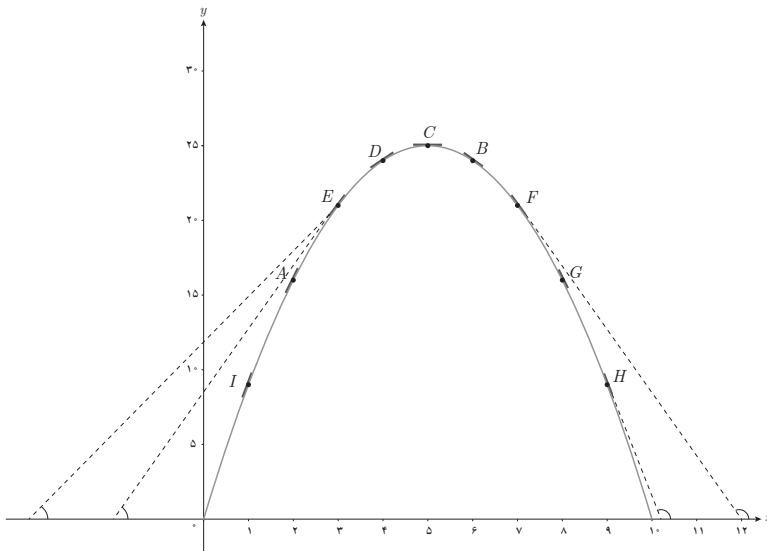
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

(\*) راهنمایی : تغییر متغیر  $a + h = x$  را به کار ببرید. توجه کنید وقتی که  $h \rightarrow 0$  آنگاه  $x \rightarrow a$   
حل :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

هدف از ارائه این کاردرکلاس، کاربرد فراوان روش دیگر برای محاسبه مشتق می‌باشد. توجه شود که هر دو روش جبری و هندسی مفید می‌باشند.

- الف) برای تابع  $f(x) = -x^2 + 1 \circ x$ ،  $f'(8)$  و  $f'(5)$  را حساب کنید.
- ب) دو نقطه روی منحنی مشخص کنید که مقدار مشخص تابع در آنها قرینه یکدیگر باشد.
- پ) به کمک شکل توضیح دهید که تابع در چه نقاطی دارای مشتق مثبت و در چه نقاطی دارای مشتق منفی است.
- ت) بدون محاسبه و تنها به کمک نمودار، شیب خط‌های مماس بر منحنی در نقاط ۳ و ۴ را با هم مقایسه کنید.



ث) با محاسبه  $f'(3)$  و  $f'(4)$  صحت حدس خود را بررسی نمایید.

حل:

الف)

$$f'(5) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-x^2 + 1 \circ x - 25}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-(x-5)^2}{x-5}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} -(x-5) = 0$$

$$f'(8) = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{f(x) - f(8)}{x - 8} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{-x^2 + 1 \circ x - 16}{x - 8} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{-(x-8)(x-2)}{x-8}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 8} -(x - 2) = -6$$

ب) نقاط  $(D, B)$  یا  $(E, F)$  یا  $(A, G)$  یا  $(I, H)$

پ) در نقاط  $(I, A, E, D)$  مشتق مثبت و در نقاط  $(B, F, G, H)$  مشتق منفی است.

ت) با توجه به شکل و مقایسه زاویه‌ها، مشتق در نقطه ۳ بزرگ‌تر از مشتق در نقطه ۴ است.  
ث)

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x^2 + 1 \cdot x - 21}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x - 3)(x - 7)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} -(x - 7) = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-x^2 + 1 \cdot x - 24}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(x - 4)(x - 6)}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} -(x - 6) = 2 \end{aligned}$$

واضح است که  $f'(3) > f'(4)$ .

## توصیه آموزشی

توجه به این نکته در این فعالیت ضروری است که برای زاویه‌های منفرد که شیب منفی به دست می‌آید، ممکن است در مقایسه شیب‌ها ایجاد بدفهمی شود. همکاران محترم با انجام یک مثال این قسمت را برجسته کنید. به عنوان نمونه شیب در نقطه ۷ بزرگتر از شیب در نقطه ۹ می‌باشد.

شیب	نقطه
۸	۱
۶	۲
۴	۳
۲	۴
۰	۵
-۲	۶
-۴	۷
-۶	۸
-۸	۹

رسم جدول فوق برای دانش‌آموزان آموزنده است.

**جمع‌بندی کلی:** مثلاً بررسی رفتار کلی از  $x = 5$  تا  $x = 0$  شیب‌ها با مقادیر مثبت کاهش می‌یابد تا به صفر برسد و از  $x = 5$  تا  $x = 10$  شیب‌ها با مقادیر منفی کاهش می‌یابند.

## پاسخ تمرین‌های ص ۸۱

۱ اگر  $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ،  $f'(2)$  را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی  $f$  را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

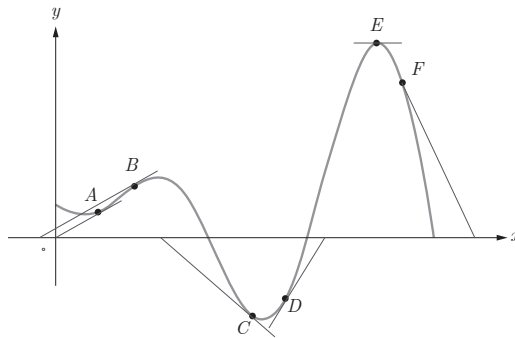
حل: با جای گذاری  $x = 2$  عرض نقطه تماس برابر ۹ به دست می‌آید و داریم:

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x + 1 - 9}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x - 8}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x + 4)(x - 2)}{x - 2} = 10. \end{aligned}$$

$$y - 9 = 10(x - 2) \rightarrow y = 10x - 11$$

۲ نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.

شیب	نقطه
-۳	F
-۱	C
۰	E
$\frac{1}{2}$	A
۱	B
۲	D



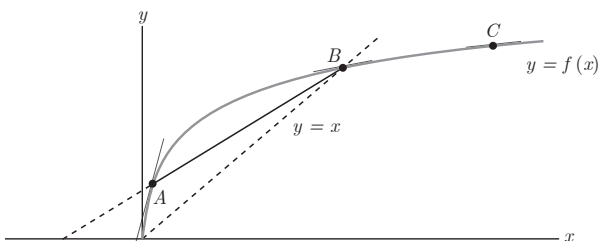
۳ برای نمودار  $y=f(x)$  در شکل

روبه‌رو شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.

الف) شیب نمودار در نقطه A

ب) شیب نمودار در نقطه B

پ) شیب نمودار در نقطه C



ت) شیب خط  $AB$

ث) شیب خط  $y=2$

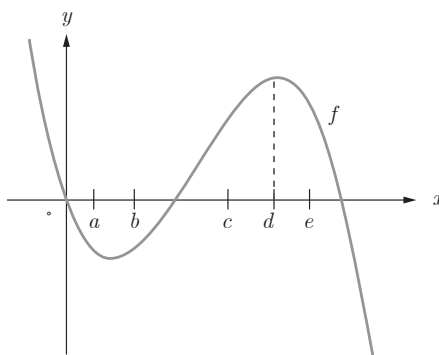
ج) شیب خط  $y=x$

شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب  $m_1, m_2, \dots$  و  $m_6$  در نظر بگیرید.

حل :  $m_5 < m_3 < m_2 < m_4 < m_6 < m_1$

۴ با در نظر گرفتن نمودار  $f$  در شکل، نقاط به طول‌های  $a, b, c, d, e$  و  $e$  را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.

$x$	$f'(x)$
d	۰
b	۰/۵
c	۲
a	-۰/۵
e	-۲



۵ نقاطی مانند  $A, B, C, D, E, F, G$  را روی نمودار  $y=f(x)$  مشخص کنید به طوری که :

الف)  $A$ ، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

ب)  $B$  نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

پ)  $C$  نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

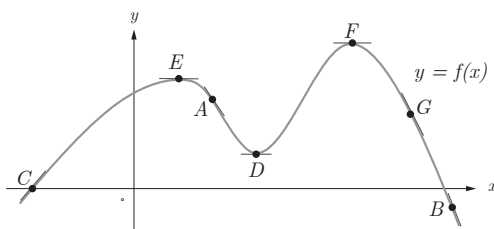
ت)  $D$  نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است.

ث) نقاط  $E$  و  $F$  نقاط متفاوتی روی منحنی

هستند که مشتق یکسان دارند.

ج)  $G$  نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار

تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.



۶ اگر  $f(x) = x^3 - 2x + 3$ ،  $f'(-1)$  را به دست آورید.

حل :

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x + 3 - (-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} = 3 \end{aligned}$$

۷ نقاط  $F, E, D, C, B, A$  را روی منحنی روبه‌رو در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام یک نادرست است؟

الف) شیب منحنی در همه این نقاط مثبت است.

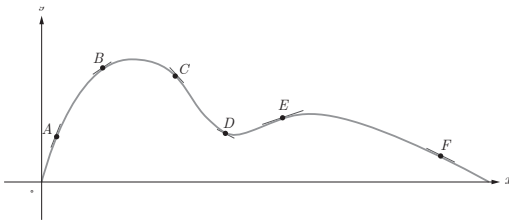
ب)  $m_A < m_B$  (شیب خط مماس بر منحنی در نقطه  $A$  را با  $m_A$  نمایش داده‌ایم)

پ)  $m_E < m_B < m_A$

ت) شیب منحنی در نقاط  $F, D, C$  و منفی است.

ث)  $m_F < m_D < m_C$

ج)  $m_C < m_D < m_F < m_E < m_B < m_A$



حل :

الف) نادرست است زیرا در نقاط  $D, F$  و  $C$  منفی می‌باشد.

ب) نادرست است زیرا زاویه‌ای که خط مماس در نقطه  $A$  با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد از

زاویه‌ای که خط مماس در نقطه  $B$  با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد بیشتر است یعنی  $m_A > m_B$ .

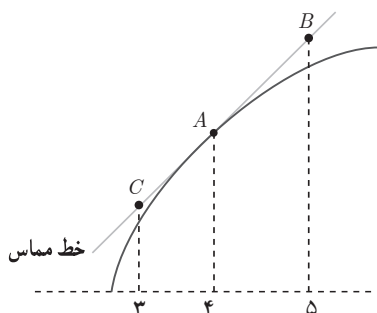
پ) درست است.

ت) درست است.

ث) نادرست است زیرا  $m_C < m_D < m_F$ .

ج) درست است.

۸ برای تابع  $f$  در شکل زیر داریم :  $f'(4) = 1/5$  و  $f(4) = 25$  با توجه به شکل مختصات نقاط  $A$  ,  $B$  و  $C$  را بیابید.



حل :

روش اول :

مختصات نقطه  $A(4, 25)$  و  $B(5, 26/5)$  و  $C(3, 23/5)$  و  $C(4-1, 25-f'(4)) = C(3, 23/5)$

روش دوم : مختصات نقطه  $A(4, 25)$  و

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 25 = 1/5(x - 4)$$

$$y = 1/5 x + 19$$

$$y_B = 26/5, y_C = 23/5$$

## اهداف کلی

بررسی مشتق پذیری و معرفی مفهوم مشتق به عنوان تابع

## اهداف جزئی

- ۱ شناسایی نقاط مشتق ناپذیر
- ۲ محاسبه مشتق چپ و راست
- ۳ بررسی رابطه بین مشتق پذیری و پیوستگی
- ۴ معرفی مماس قائم
- ۵ آشنایی و درک تابع مشتق
- ۶ محاسبه تابع مشتق برخی توابع
- ۷ مشتق تابع مثلثاتی و مرکب
- ۸ مشتق پذیری روی یک بازه
- ۹ معرفی مشتق مرتبه دوم

## پیش نیازها

- ۱ آشنایی با مشتق در یک نقطه
- ۲ آشنایی با خط مماس
- ۳ آشنایی با حدهای نامتناهی



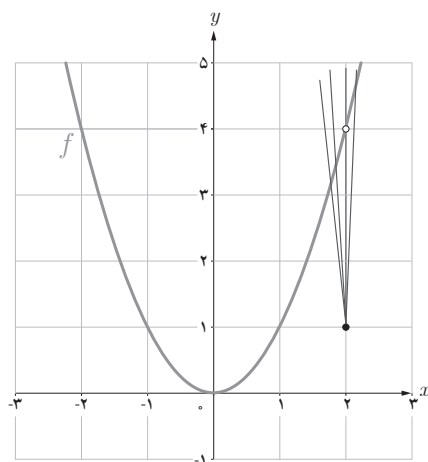
## روش تدریس

در این درس در شروع با توجه به مفهوم شیب خط مماس بر منحنی به بررسی عدم وجود خط مماس در نقاطی که تابع ناپیوسته است، پرداخته می‌شود و ارتباط بین پیوستگی و مشتق‌پذیری بررسی می‌شود. با استفاده از نیم مماس‌های راست و چپ مفهوم مشتق راست و چپ ارائه می‌شود سپس مشتق به عنوان یک تابع ارائه می‌شود و در نهایت دستورهایی برای محاسبه مشتق برخی توابع داده می‌شود. هدف از این فعالیت آن است که مشخص کنیم تا چه حد ناپیوستگی روی مشتق‌پذیری مؤثر است. در این فعالیت تابع ناپیوستگی رفع شدنی دارد (حد وجود دارد).

## فعالیت ص ۸۴

نمودار تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$  (شکل زیر) را در نظر می‌گیریم:

الف) چگونه به کمک نمودار تابع و تعریف مشتق به عنوان شیب خط مماس می‌توانید استدلال کنید که  $f'(2)$  وجود ندارد؟



**حل :** با توجه به تعریف مشتق، به دلیل این که مخرج کسر صفر است و صورت کسر یک عدد پس حد وجود ندارد.

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = \infty$$

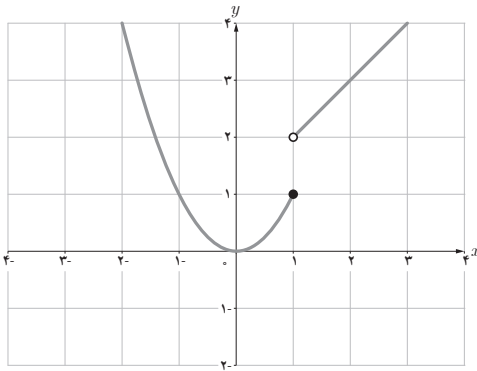
به کمک نمودار هم به دلیل این که شیب خطوط قاطع رسم شده به عدد خاصی نزدیک نمی شوند، مشتق وجود ندارد (زاویه خطوط قاطع نسبت به جهت مثبت محور طول ها به  $90^\circ$  درجه نزدیک می شوند).

هدف از این کار در کلاس، معرفی نوع دیگر ناپیوستگی (که رفع نشدنی است) و تأثیر آن بر مشتق پذیری می باشد. تابع در این نقطه پیوستگی چپ دارد.

### کار در کلاس ص ۸۵

تابع  $g$  (شکل زیر) را به صورت 
$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$$
 در نظر می گیریم.

چرا  $g'(1)$  موجود نیست؟



**حل :** مشتق چپ و راست در  $x = 1$  محاسبه می کنیم :

$$g'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 1 - 1}{x - 1} = +\infty$$

$$g'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) = 2$$

با توجه به اینکه مشتق چپ و راست برابر نیست پس تابع مشتق پذیر نمی باشد.

نشان دهید که مشتق تابع  $f$  در مثال قبل در  $x = -1$  نیز موجود نیست.  
 در صورت امکان معادله نیم مماس های راست و چپ در  $x = -1$  را بنویسید.

حل :

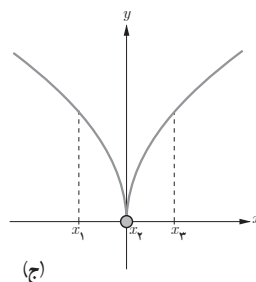
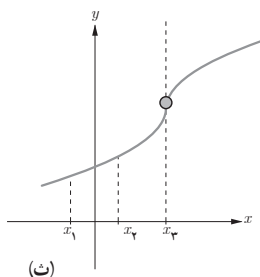
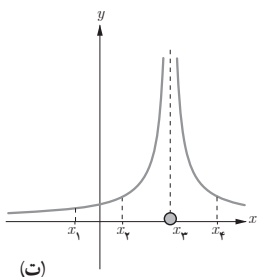
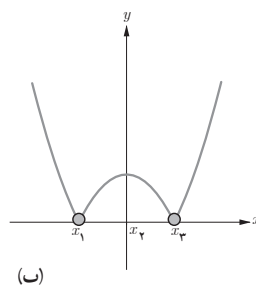
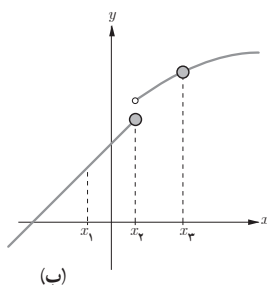
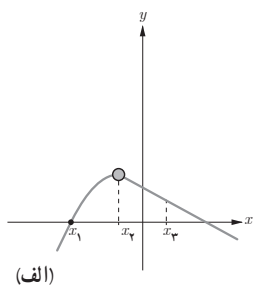
$$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{|x^2 - 1| - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{-(x^2 - 1)}{x + 1} = 2$$

$$f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{|x^2 - 1| - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{(x^2 - 1)}{x + 1} = -2$$

نیم مماس راست:  $y - 0 = 2(x + 1) \rightarrow y = 2x + 2$

نیم مماس چپ:  $y - 0 = -2(x + 1) \rightarrow y = -2x - 2$

در شکل های زیر مشخص کنید که هر تابع در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده مشتق پذیر نیست.

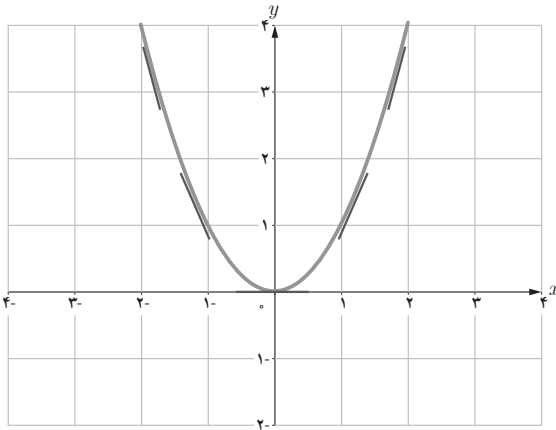


حل :

شکل الف، تابع در  $x_7$  مشتق‌پذیر نیست زیرا مشتق چپ و راست برابر نیستند. دو نیم مماس داریم.  
 شکل ب، تابع در  $x_7$  و  $x_8$  مشتق‌پذیر نیست زیرا در این نقاط تابع ناپیوسته است.  
 شکل پ، تابع در  $x_7$  و  $x_8$  مشتق‌پذیر نیست زیرا مشتق چپ و راست برابر نیستند. دو نیم مماس داریم.  
 شکل ت، تابع در  $x_7$  مشتق‌پذیر نیست زیرا تابع ناپیوسته است.  
 شکل ث، تابع در  $x_7$  مشتق‌پذیر نیست زیرا مماس قائم داریم.  
 شکل ج، تابع در  $x_7$  مشتق‌پذیر نیست زیرا مماس قائم داریم.  
 هدف از این فعالیت عبور از مشتق در یک نقطه به مشتق به عنوان تابع به کمک چند مثال و تعمیم می‌باشد.  
 همان‌طور که در بخش‌های نظری نیز بیان گردید مناسب است دانش‌آموزان را با چند مثال ساده وارد بحث مشتق به عنوان تابع نماییم.

### فعالیت ص ۹۰

تابع  $f(x) = x^2$  را در نظر می‌گیریم.



جدول زیر را کامل کنید (مشتق تابع در برخی نقاط حساب شده‌اند).

$x$	-۳	-۲	-۱	۰	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	۲
$f'(x)$		-۴		۰		$2\sqrt{3}$	۴

$$f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x - 2) = -4$$

$$f'(\sqrt{3}) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{f(x) - f(\sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

می‌دانیم مشتق تابع در یک نقطه (در صورت وجود) برابر شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه است و از طرفی مماس بر منحنی در هر نقطه یکتاست، بنابراین  $f'(x)$  تابعی از  $x$  است. حدس می‌زنید در چه نقاطی مشتق تابع  $f(x) = x^2$  وجود دارد؟

حل :

$$f'(-3) = \lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{f(x) - f(-3)}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = -6$$

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = -2$$

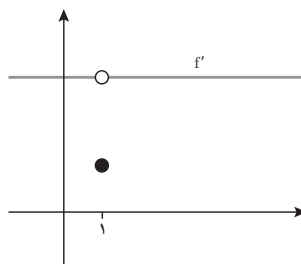
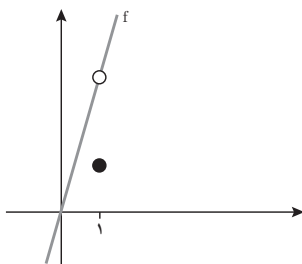
$$f'(\frac{1}{2}) = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})} \frac{f(x) - f(\frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})} \frac{x^2 - \frac{1}{4}}{x - \frac{1}{2}} = 1$$

در تمام نقاط مشتق وجود دارد.

## کار در کلاس ص ۹۲

اگر  $f(x) = \begin{cases} 5x & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$  دامنه  $f$  و دامنه  $f'$  را محاسبه کنید و ضابطه  $f'$  را به دست آورید. نمودار  $f$  و نمودار  $f'$  را رسم کنید.

حل : دامنه تابع تمام اعداد حقیقی است ولی دامنه تابع مشتق آن تمام اعداد حقیقی به غیر از ۱ می‌باشد.



$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(x+h) - 5x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5h}{h} = 5 \quad x \neq 1$$

تابع در  $x=1$  مشتق پذیر نیست زیرا پیوسته نمی باشد.

## توصیه آموزشی

بررسی رابطه بین نمودار تابع و مشتق آن بسیار حائز اهمیت است. با تأمل در این قسمت به دانش آموزان کمک شود تا بهتر آن را درک کنند. از آوردن مثال های پیچیده برای دانش آموزان خودداری شود. توجه شود که تاکنون قاعده ای برای محاسبه مشتق مطرح نگردیده است و دانش آموز بایستی از طریق تعریف محاسبات را انجام دهد.

## کار در کلاس ص ۹۵

۱ مشتق تابع های زیر را به دست آورید :

$$\text{الف) } f(x) = \frac{1}{x-4} \quad \text{ب) } g(x) = \sqrt{x}(3x^2 + 5) \quad \text{پ) } h(x) = \frac{x}{2x^2 + x - 1}$$

۲ اگر  $f$  و  $g$  توابع مشتق پذیر باشند و  $f(2) = 3$ ،  $f'(2) = 5$ ،  $g(2) = 8$  و  $g'(2) = -6$  مقدار  $(fg)'(2)$  و  $(\frac{f}{g})'(2)$  را به دست آورید.

حل :

$$\text{الف) } f'(x) = -\frac{1}{(x-4)^2} \quad x \neq 4$$

$$\text{ب) } g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(3x^2 + 5) + (6x)\sqrt{x}$$

$$\text{پ) } h'(x) = \frac{1(2x^2 + x - 1) - (4x + 1)(x)}{(2x^2 + x - 1)^2}$$

$$(fg)'(2) = f'(2)g(2) + g'(2)f(2) = 5(8) + (-6)^3 = 22$$

۲

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{f'(2)g(2) - g'(2)f(2)}{g^2(2)} = \frac{5(8) - (-6)^3}{8^2} = \frac{58}{64} = \frac{29}{32}$$

## کار در کلاس ص ۹۶

مشتق توابع زیر را به دست آورید.

الف)  $f(x) = \sin x \tan x$

ب)  $g(x) = \frac{5 \cos x}{1 - \sin x}$

حل : الف)  $f'(x) = \cos x(\tan x) + (1 + \tan^2 x)(\sin x)$

ب)  $g'(x) = \frac{-5 \sin x(1 - \sin x) - (-\cos x)(5 \cos x)}{(1 - \sin x)^2}$

## کار در کلاس ص ۹۷

مشتق تابع های زیر را به دست آورید.

الف)  $f(x) = (x^5 + 1)^2(5x - 1)$

ب)  $g(x) = \cos^2 x$

پ)  $h(x) = \sin(3x^5 + 5)$

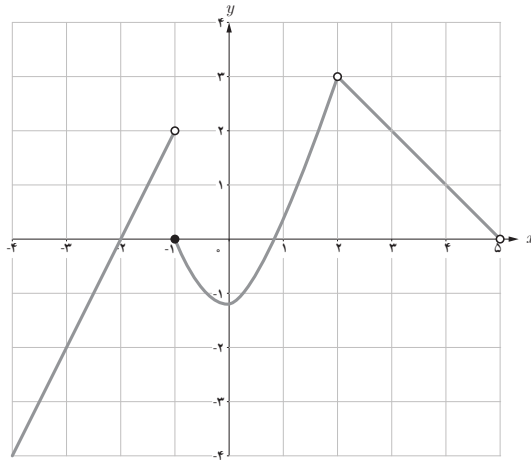
حل :

الف)  $f'(x) = 3(2x)(x^5 + 1)^2(5x - 1) + 5(x^5 + 1)^2$

ب)  $g'(x) = 3(-\sin x) \cos^2 x$

پ)  $h'(x) = 6x \cos(3x^5 + 5)$

اگر  $f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x < -1 \\ x^2-1 & -1 \leq x < 2 \\ -x+5 & 2 < x < 5 \end{cases}$  نمودار  $f$  را رسم کنید و مشتق‌پذیری  $f$  را روی بازه‌های  $[-1, 1]$ ،  $(2, 5)$  و  $[-2, 0]$  بررسی کنید.



حل :

تابع  $f$  در بازه  $[-1, 1]$  مشتق‌پذیر و مشتق آن با استفاده از تعریف  $x^2$  است. تابع در بازه  $(2, 5)$  مشتق‌پذیر و مشتق آن با استفاده از تعریف  $-x$  می‌باشد. ولی تابع در بازه  $[-2, 0]$  مشتق‌پذیر نیست زیرا در  $x = -1$  دارای مشتق چپ  $2$  و مشتق راست  $-2$  است (با استفاده از تعریف).

$$x < -1: f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h) + 4 - 2x - 4}{h} = 2$$

$$-1 < x < 2: f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - 1 - x^2 + 1}{h} = 2x$$

$$2 < x < 5: f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(x+h) + 5 - (-x + 5)}{h} = -1$$

تابع در  $x = -1$  پیوسته نیست و مشتق ندارد ولی در  $x = 2$  پیوسته است ولی مشتق چپ و راست برابری ندارد (دو نیم مماس داریم).



## توصیه آموزشی

مفهوم مشتق پذیری روی یک بازه را هم از روی نمودار و هم با استفاده از تعریف مشتق برای دانش آموزان مشخص نمایید. توجه شود که در توابع چند ضابطه‌ای امکان بروز بدفهمی هنگام مشتق‌گیری وجود دارد. مثلاً  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ 2x+1 & x < 1 \end{cases}$  در  $x=1$  پیوسته نیست و مشتق ندارد در حالی که اگر از هر یک از ضابطه‌ها به تنهایی مشتق گرفته شود به نتیجه اشتباه منجر می‌شود و مشتق تابع ظاهراً ۲ می‌شود. در حقیقت در این مثال شرایط مشتق‌گیری از هر دو ضابطه وجود ندارد.

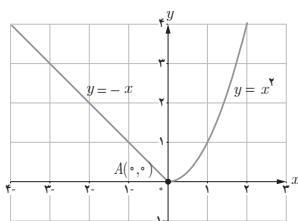
## تمرین ص ۹۹

۱ دو تابع مختلف مانند  $f$  و  $g$  مثال بزنید که هر دو در  $x=2$  پیوسته باشند ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نباشند.

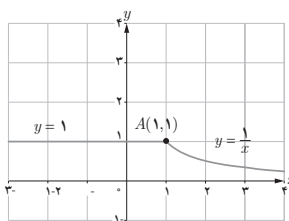
حل :

یکی از پاسخ‌ها می‌تواند  $g(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ -2x+7 & x > 2 \end{cases}$  و  $f(x) = |x-2|$  باشند.

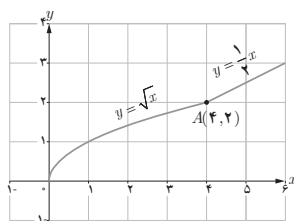
۲ با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده شده در نقطه  $A$ ، نشان دهید که این توابع در نقطه  $A$  مشتق‌پذیر نیستند.



(الف)



(ب)



(پ)

حل :

الف) با استفاده از تعریف مشتق،  $f'_+(0) = 0$ ،  $f'_-(0) = -1$

ب)  $f'_+(1) = -1$ ،  $f'_-(1) = 0$

پ) با استفاده از تعریف،  $f'_-(4) = \frac{1}{4}$ ،  $f'_+(4) = \frac{1}{4}$

۳ تابع  $f(x) = \begin{cases} 5x-4 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 3 \\ x+6 & x > 3 \end{cases}$  داده شده است.

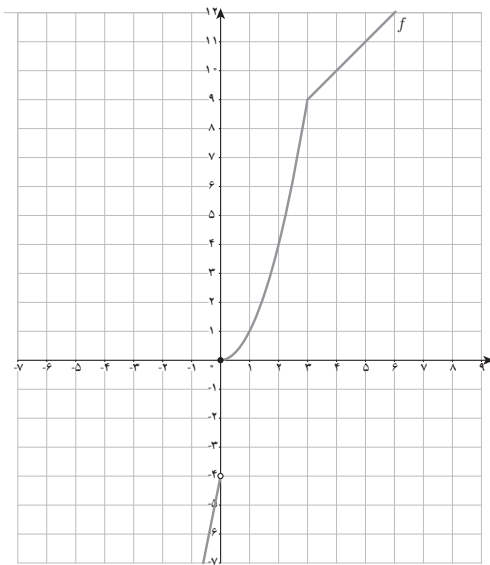
الف) نمودار تابع  $f$  را رسم کنید.

ب) نشان دهید که  $f'(0)$  و  $f'(3)$  وجود ندارند.

پ) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

ت) نمودار تابع  $f'$  را رسم کنید.

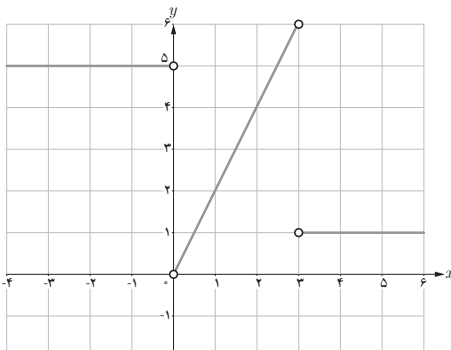
حل: الف)



ب) با استفاده از تعریف مشتق،  $f'_-(0) = 5$ ،  $f'_+(0) = 0$ ،  $f'_-(3) = 6$ ،  $f'_+(3) = 1$ ،

پ)  $f'(x) = \begin{cases} 5 & x < 0 \\ 2x & 0 < x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$

ت)



۴ نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن

الف) در یک نقطه برابر صفر شود.

ب) در  $x = 2$  برابر ۳ شود.

پ) در تمام نقاط مثبت باشد.

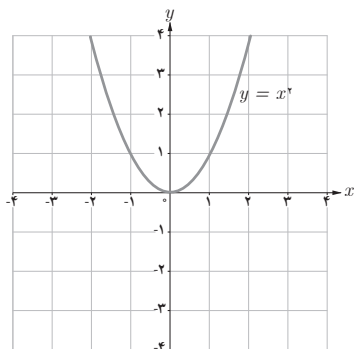
ت) در تمام نقاط یکسان باشد.

ث) در تمام نقاط منفی باشد.

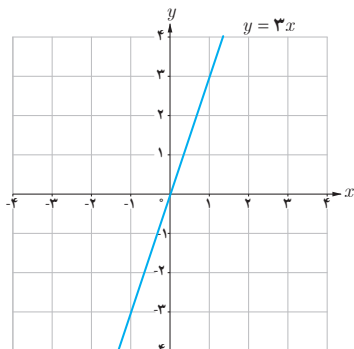
حل : نمونه‌ای از پاسخ‌ها می‌تواند به صورت

زیر باشد :

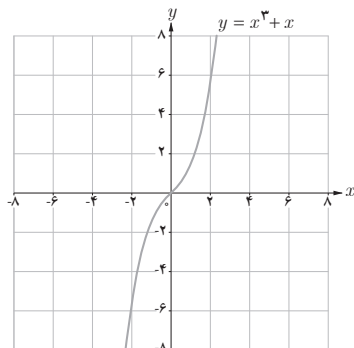
الف)  $f'(0) = 0$

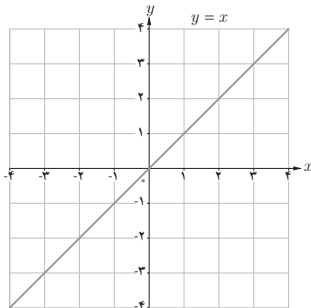


ب)  $f'(2) = 3$

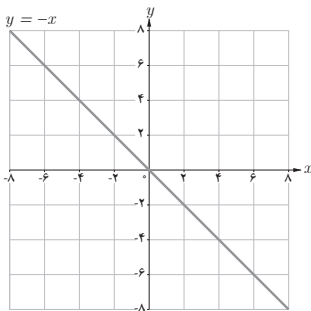


پ)  $f'(x) = 3x^2 + 1$





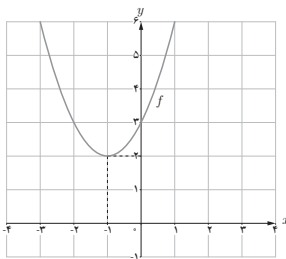
ت)  $f'(x) = 1$



ث)  $f'(x) = -1$

تذکر: توجه شود که این تمرین بازپاسخ است و مقایسه بین پاسخ‌ها چه درست یا نادرست آموزنده است.

۵



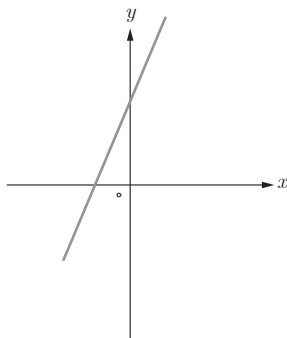
الف) با استفاده از نمودار تابع  $f(x) = x^2 + 2x + 3$  (شکل مقابل) مقادیر زیر را به ترتیب صعودی مرتب کنید.

$$f'(3) \text{ و } f'(0) \text{ و } f'(-1) \text{ و } f'(2)$$

ب) صحت ادعای خود در (الف) را با محاسبه مشتق تابع  $f(x) = x^2 + 2x + 3$  بررسی کنید.  
پ) تابع مشتق را رسم کنید.  
حل:

الف) با استفاده از شیب خطوط مماس  $f'(-1) < f'(0) < f'(2) < f'(3)$

ب)  $f'(x) = 2x + 2$ :  $f'(-1) = 0$ ,  $f'(0) = 2$ ,  $f'(2) = 6$ ,  $f'(3) = 8$



پ)

۶ مشتق پذیری تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$  را در نقطه  $x = 1$  بررسی کنید.

حل :

تابع در  $x = 1$  پیوسته نیست پس مشتق پذیر نمی باشد.  $(f'_+(1) = +\infty$  و  $f'_-(1) = 2)$

۷ سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آنها با هم برابر باشند.

حل :

این مسئله باز پاسخ است یکی از جواب ها می تواند  $h(x) = x + 2$  ,  $g(x) = x + 1$  ,  $f(x) = x$  باشد.

۸ اگر  $f(x) = |x^2 - 4|$  به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری  $f$  را در نقاط به طول های ۲ و -۲ بررسی کنید.

حل : تابع در نقاط ۲ و -۲ مشتق پذیر نمی باشد.

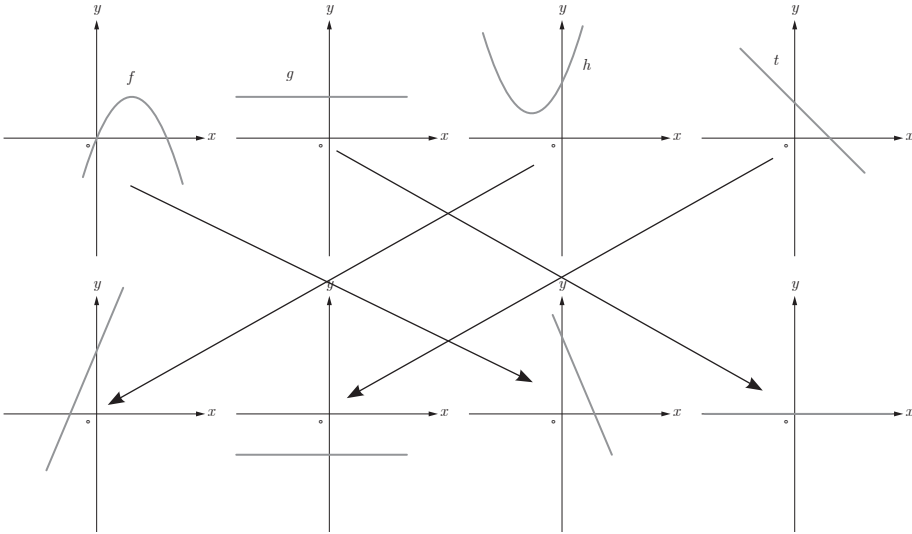
$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x^2 - 4| - 0}{x - 2} = 4$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - 4| - 0}{x - 2} = -4$$

$$f'_+(-2) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{|x^2 - 4| - 0}{x + 2} = -4$$

$$f'_-(-2) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{|x^2 - 4| - 0}{x + 2} = 4$$

۹ نمودار توابع  $f$ ،  $g$ ،  $h$  و  $t$  را به نمودار مشتق آنها، نظیر کنید.



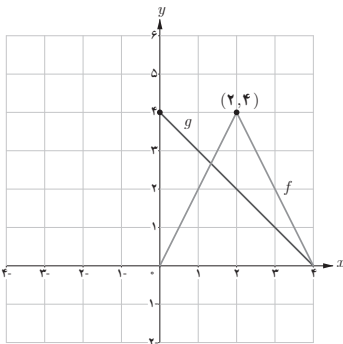
۱۰ نمودار توابع  $f$  و  $g$  را در شکل مقابل در نظر بگیرید.

الف) اگر  $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

مطلوب است:  $h'(1)$ ،  $h'(2)$  و  $h'(3)$

ب) اگر  $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

مطلوب است:  $k'(1)$ ،  $k'(2)$  و  $k'(3)$



حل:  
الف)

$$h'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

$$h'(1) = 2(3) + (-1)2 = 4$$

$$h'(2) = \text{وجود ندارد}$$

$$h'(3) = (-2)1 + (-1)2 = -4$$

$$k'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} \quad \text{ب)}$$

$$k'(1) = \frac{2(3) - (-1)(2)}{9} = \frac{8}{9}$$

وجود ندارد

$$k'(3) = \frac{(-2)1 - (-1)2}{1} = 0$$

۱۱ اگر  $f'(1) = 3$  و  $g'(1) = 5$  مطلوب است،  $(f+g)'(1)$  و  $(3f+2g)'(1)$

حل :

$$(f+g)'(1) = f'(1) + g'(1) = 3 + 5 = 8$$

$$(3f+2g)'(1) = 3f'(1) + 2g'(1) = 3(3) + 2(5) = 19$$

۱۲ اگر  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$  نشان دهید  $f'_+(\circ)$  و  $f'_-(\circ)$  موجودند ولی  $f'(\circ)$  موجود نیست.

حل :

تابع  $f$  در  $x = 0$  پیوسته است و  $f'_+(\circ) = 1$ ،  $f'_-(\circ) = 0$ .

$$f'_-(\circ) = \lim_{x \rightarrow \circ^-} \frac{f(x) - f(\circ)}{x - \circ} = \lim_{x \rightarrow \circ^-} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = 0$$

$$f'_+(\circ) = \lim_{x \rightarrow \circ^+} \frac{f(x) - f(\circ)}{x - \circ} = \lim_{x \rightarrow \circ^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1$$

۱۳ مشتق توابع داده شده را بیابید.

الف)  $f(x) = (3x^2 - 4)(2x - 5)^2$

ب)  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{-3x + 2}$

پ)  $f(x) = (\sqrt{3x+2})(x^3+1)$

ت)  $f(x) = \frac{9x-2}{\sqrt{x}}$

حل :

$$f'(x) = 6x(2x-5)^2 + 3(2)(2x-5)^2(3x^2-4) \quad (\text{الف})$$

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(-3x+2) - (-3)(x^2-3x+1)}{(-3x+2)^2} \quad (\text{ب})$$

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}(x^2+1) + 3x^2(\sqrt{3x+2}) \quad (\text{پ})$$

$$f'(x) = \frac{9(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(9x-2)}{x} \quad (\text{ت})$$

۱۴ مشتق توابع مثلثاتی زیر را به دست آورید.

$$\text{الف)} f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\text{ب)} f(x) = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$$

$$\text{پ)} f(x) = \tan^2 x - 2 \cos x$$

$$\text{ت)} f(x) = \sin x \cos^2 x$$

حل :

$$f'(x) = 2 \cos x \sin x + 2(-\sin x) \cos x \quad (\text{الف})$$

$$f'(x) = \frac{-\cos x(1 + \sin x) - \cos x(1 - \sin x)}{(1 + \sin x)^2} \quad (\text{ب})$$

$$f'(x) = 2(1 + \tan^2 x) \tan x + 2 \sin x \quad (\text{پ})$$

$$f'(x) = \cos x \cos^2 x + (-2 \sin^2 x) \sin x \quad (\text{ت})$$



## آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر

### هدف کلی درس

بررسی آهنگ تغییر و رابطه آن با مشتق

### اهداف درس

- ۱ تعبیر هندسی و فیزیکی آهنگ تغییر
- ۲ محاسبه آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر و تفاوت آنها
- ۳ کاربردهای آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر
- ۴ سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای
- ۵ اتصال بین آهنگ لحظه‌ای تغییر و مشتق

### پیش نیازها

- ۱ آشنایی با خارج قسمت تفاضلی
- ۲ آشنایی با مشتق
- ۳ آشنایی با مفاهیم اولیه سرعت

## روش تدریس

در این درس آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای و کاربردهای آن معرفی شده است. مثال‌های متنوعی برای دانش‌آموزان ارائه شده است. توجه شود که آهنگ متوسط تغییر با شیب خط قاطع و آهنگ لحظه‌ای تغییر با مقدار مشتق و شیب خط مماس در آن نقطه برابرند.

با توجه به آنکه دانش‌آموزان در درس فیزیک ۳ پایه دوازدهم با مفهوم سرعت لحظه‌ای به طور شهودی آشنا می‌شوند، فرصتی مناسب فراهم می‌شود تا به مفهوم سرعت لحظه‌ای از منظر ریاضی با دقت بیشتری پرداخته شود. بهتر است ارتباط با درس فیزیک به دانش‌آموزان یادآوری شود.

## کار در کلاس ص ۱۰۴

۱ نمودار زیر موقعیت یک ذره را در لحظه  $t$  نمایش می‌دهد. مقادیر زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید (محاسبه عددی لازم نیست)

A سرعت متوسط بین  $t=1$  و  $t=3$

B سرعت متوسط بین  $t=5$  و  $t=6$

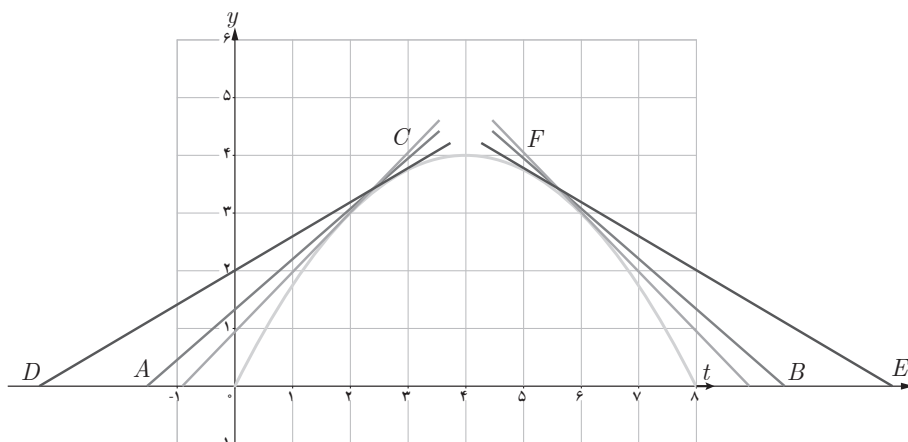
C سرعت لحظه‌ای در  $t=1$

D سرعت لحظه‌ای در  $t=3$

E سرعت لحظه‌ای در  $t=5$

F سرعت لحظه‌ای در  $t=6$

حل:  $F < B < E < D < A < C$



### کار در کلاس ص ۱۰۵

الف) آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی  $[0, 25]$  چقدر است؟  
 ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد کودک را در ۲۵ ماهگی و ۴۹ ماهگی، باهم مقایسه کنید. کدام یک بیشتر است؟

ب) اگر قد علی در ۱۶ ماهگی، ۸۰ سانتی‌متر و در ۳۶ ماهگی، ۹۵ سانتی‌متر باشد، آهنگ متوسط تغییر رشد او را در این فاصله حساب کنید و با نمودار صفحه قبل مقایسه کنید.

حل :

$$\frac{f(25) - f(0)}{25} = \frac{7\sqrt{25} + 50 - 50}{25} = \frac{35}{25} = \frac{7}{5} = 1.4 \text{ cm / M} \quad \text{الف)}$$

$$f'(x) = \frac{7}{2\sqrt{x}}; f'(25) = \frac{7}{10} = 0.7, f'(49) = \frac{7}{14} = 0.5 \rightarrow f'(49) < f'(25) \quad \text{ب)}$$

$$\frac{f(36) - f(16)}{36 - 16} = \frac{95 - 80}{20} = \frac{15}{20} = 0.75 \text{ cm / M} \quad \text{ب)}$$

### کار در کلاس ص ۱۰۸

با توجه به مثال قبل :

الف) سرعت جسم هنگام پرتاب و هنگام برخورد به زمین را به دست آورید.

ب) سرعت متوسط جسم را در بازه زمانی  $[5, 8]$  به دست آورید.

ب) لحظاتی را معلوم کنید که سرعت جسم  $35 \text{ m/s}$  و  $-35 \text{ m/s}$  است.

حل :

$$h'(t) = -10t + 40 \quad \text{الف)}$$

$$h'(0) = 40 \text{ m/s}, h'(8) = -40 \text{ m/s}$$

$$\frac{h(8) - h(5)}{8 - 5} = \frac{((-5)(8) + 40(8)) - ((-5)(5) + 40(5))}{3} = \frac{-75}{3} = -25 \text{ m/s} \quad \text{ب)}$$

$$h'(t) = -10t + 40 = 35 \rightarrow t = 0.5 \text{ s} \quad \text{ب)}$$

$$h'(t) = -10t + 40 = -35 \rightarrow t = 7.5 \text{ s}$$

۱ جدول زیر درجه حرارت  $T$  (سانتی گراد) را در شهری از ساعت ۸ تا ۱۸ در یک روز نشان می دهد.

ساعت $h$	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
درجه حرارت $T$	۱۱	۱۳	۱۴	۱۷	۱۹	۱۸	۱۷	۱۵	۱۳	۱۰	۹

آهنگ تغییر متوسط درجه حرارت نسبت به زمان را :

(الف) از ساعت ۸ تا ساعت ۱۲ به دست آورید.

(ب) از ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸ به دست آورید.

(پ) پاسخ ها را تفسیر کنید.

حل :

$$\frac{T(12) - T(8)}{12 - 8} = \frac{19 - 11}{4} = 2^\circ C/h \quad \text{(الف)}$$

$$\frac{T(18) - T(12)}{18 - 12} = \frac{9 - 19}{6} = -1.67^\circ C/h \quad \text{(ب)}$$

(پ) از صبح ساعت ۸ تا ۱۲ درجه حرارت با سرعت متوسط ۲ سانتی گراد بر ساعت در حال افزایش

است و از ساعت ۱۲ تا ۱۸ درجه حرارت با سرعت متوسط  $-1.67$  سانتی گراد بر ساعت در حال کاهش می باشد.

۲ کسری از جمعیت یک شهر که به وسیله

یک ویروس آلوده شده اند بر حسب زمان (هفته) در نمودار رویه رو نشان داده شده است.

(الف) شیب های خطوط  $t$  و  $d$  چه چیزهایی را

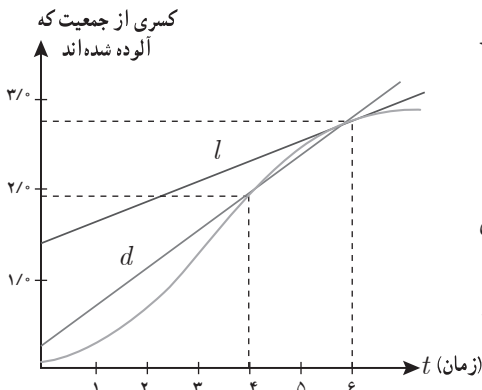
نشان می دهند؟

(ب) گسترش آلودگی در کدام یک از زمان های

$t=1$ ،  $t=2$  یا  $t=3$  بیشتر است؟

(پ) قسمت ب را برای  $t=4$ ،  $t=5$  یا  $t=6$

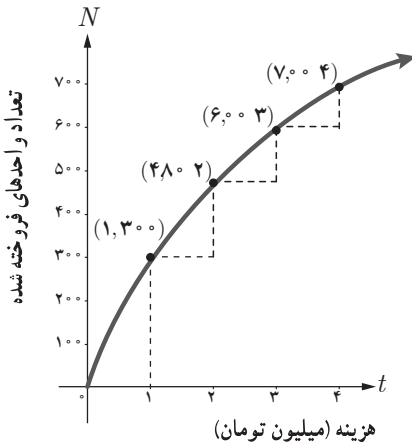
بررسی کنید.



**حل :** شیب خط  $l$  سرعت آلوده شدن کسری از جمعیت شهر در پایان هفته ششم (سرعت لحظه‌ای در  $t=6$ ) و شیب خط  $d$  سرعت متوسط آلوده شدن کسری از جمعیت شهر در بین هفته‌های چهارم تا ششم (آهنگ تغییر متوسط در بین لحظات ۴ تا ۶ هفته) را نشان می‌دهد.

(ب) با توجه به شیب خط گسترش آلودگی در زمان‌های  $t=1$  تا  $t=3$  در حال افزایش است.

(پ) با توجه به شیب خط گسترش آلودگی در زمان‌های  $t=4$  تا  $t=6$  در حال کاهش می‌باشد.



**۳** نمودار روبه‌رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا ( $N$ ) پس از صرف  $t$  میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است.

(الف) آهنگ تغییر  $N$  بر حسب  $t$  را وقتی  $t$  از ۰ تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳ و ۳ تا ۴ تغییر می‌کند به دست آورید.

(ب) به نظر شما چرا آهنگ تغییرات، وقتی که مقادیر  $t$  افزایش می‌یابند، در حال کاهش است؟

$$\text{حل : الف)} \quad \frac{N(1) - N(0)}{1 - 0} = \frac{300 - 0}{1} = 300$$

$$\frac{N(2) - N(1)}{2 - 1} = \frac{480 - 300}{1} = 180$$

$$\frac{N(3) - N(2)}{3 - 2} = \frac{600 - 480}{1} = 120 \quad \frac{N(4) - N(3)}{4 - 3} = \frac{700 - 600}{1} = 100$$

(ب) با توجه به شیب خطوط قاطع که در حال کم شدن است بنابراین آهنگ تغییر در حال کاهش می‌باشد.

هزینه‌های تبلیغات تا یک اندازه مشخص در فروش کالا اثرگذار است. افزایش بیش از حد هزینه تأثیر بسزایی در میزان فروش ندارد.

**۴** معادله حرکت متحرکی به صورت  $f(t) = t^2 - t + 1$  بر حسب متر در بازه زمانی  $[0, 5]$  ( $t$  بر حسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی  $[0, 5]$  باهم برابرند؟

$$\text{حل :} \quad f'(t) = 2t - 1 \rightarrow 2t - 1 = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0}$$

$$\rightarrow 2t - 1 = \frac{30 - 10}{5} = 4 \rightarrow t = 2.5 \text{ s}$$

۵ تویی از یک پل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می‌شود.  $f(t)$  نشان‌دهنده فاصله توپ از سطح زمین در زمان  $t$  است. برخی از مقادیر  $f(t)$  در جدول زیر نمایش داده شده است.

$t$ \ ثانیه $s$	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
$f(t)$ \ متر $m$	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

براساس جدول کدام یک از مقادیر زیر می‌تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظیر زمان ۰/۴ ثانیه، است نشان دهد؟

الف)  $۱/۲۳ \text{ m/s}$

ب)  $۱۴/۹۱ \text{ m/s}$

پ)  $۱۱/۵ \text{ m/s}$

ت)  $۱۶/۰۳ \text{ m/s}$

حل: گزینه پ صحیح است. چند پاسخ و استدلال دانش‌آموزان در زیر ارائه شده است.  
روش اول: گزینه پ درست است زیرا سرعت تقریبی برابر است با جابجایی به روی زمان

$$v \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۱۷/۴ - ۱۶/۳}{۰/۱} = \frac{۱/۱}{۰/۱} = ۱۱$$

روش دوم: گزینه پ صحیح است زیرا سرعت باید بین سرعت متوسط در بازه  $[۰/۳, ۰/۴]$  و  $[۰/۴, ۰/۵]$  باشد.

$$\frac{۱/۱}{۰/۱} < v < \frac{۱/۲}{۰/۱} \Rightarrow ۱۱ < v < ۱۲$$

$t$ \ ثانیه $s$	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
$f(t)$ \ متر $m$	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

روش سوم : گزینه پ درست است زیرا با محاسبه سرعت‌های متوسط به جواب مسئله می‌رسیم.

$$۱۳، ۱۲/۵، ۱۲، \boxed{۱۱/۵}، ۱۱، ۱۰/۵$$

$t$	ثانیه $s$	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
$f(t)$	متر $m$	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

روش چهارم : گزینه پ صحیح است زیرا

$$v_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{۱۷/۴ - ۱۵/۱}{۰/۵ - ۰/۴} = ۱۱/۵$$

$$v_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \frac{۱۸/۴ - ۱۳/۸}{۰/۶ - ۰/۲} = ۱۱/۵$$

$t$	ثانیه $s$	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
$f(t)$	متر $m$	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

۶ با توجه به مقادیر تابع  $f$  در جدول زیر،  $f'$  را برای نقاط داده شده تخمین بزنید. به‌طور مثال  $f'(۰) = -۶$ . بقیه جدول را کامل کنید.

$x$	۰	۵	۱۰	۱۵	۳۰
$f(x)$	۱۰۰	۷۰	۵۵	۴۶	۴۰
مقدار تقریبی $f'(x)$	-۶	-۳	-۱/۸	-۰/۴	-۰/۴

تذکر : برای تقریب مشتق در یک نقطه مثلاً ۵ می‌توان از آهنگ متوسط تغییر بازه  $[۵، ۱۰]$  یا  $[۰، ۵]$  استفاده کرد.

حل : برای محاسبه تقریب  $f'(۳۰)$  داریم :

$$f'(۳۰) \approx \frac{f(۱۵) - f(۳۰)}{۱۵ - ۳۰} = \frac{۴۶ - ۴۰}{-۱۵} = -۰/۴$$

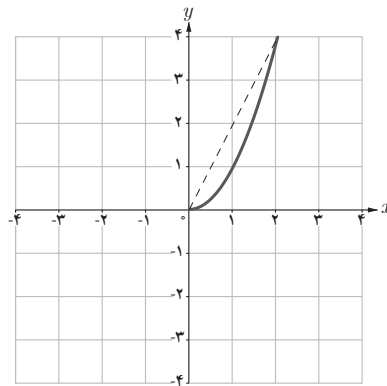
۷ کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است :

الف) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند  $f$  در بازه  $[۰, ۱]$  همیشه کمتر از شیب آن منحنی در نقطه است.

ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن، همواره صعودی است.

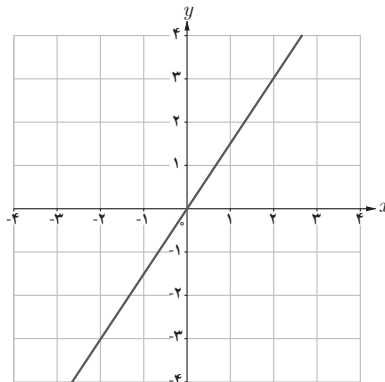
پ) تابعی وجود ندارد که برای آن هم  $f'(a) = ۰$  و هم  $f(a) = ۰$

حل : الف) نادرست است مثال نقض،  $f(x) = x^2$  در  $x = ۰$  شیبی کمتر از آهنگ تغییر متوسط در بازه  $[۰, ۱]$  دارد.



ب) نادرست است مثال نقض،  $f(x) = x$  تابعی صعودی است ولی آهنگ تغییرات متوسط آن ثابت

می باشد.



پ) نادرست است مثال نقض،  $f(x) = x^2$  در  $x = ۰$  دارای این ویژگی است که  $f'(۰) = ۰$  و  $f(۰) = ۰$ .



۸ یک توده باکتری پس از  $t$  ساعت دارای جرم  $m(t) = \sqrt{t} + 2t^2$  گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی  $3 \leq t \leq 4$  چند گرم افزایش می‌یابد؟

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه  $t=3$  چقدر است؟

حل :

$$\text{الف) } m(4) - m(3) = 130 - (54 + \sqrt{3}) = 76 - \sqrt{3}$$

$$\text{ب) } m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 4t : m'(3) = 54 + \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

۹ گنجایش ظرفی  $40$  لیتر مایع است. در لحظه  $t=0$  سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع

باقی مانده در ظرف پس از  $t$  ثانیه از رابطه  $V = 40(1 - \frac{t}{100})^2$  به دست آید :

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی  $[0, 1]$  چقدر است؟

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه  $[0, 100]$  می‌شود؟

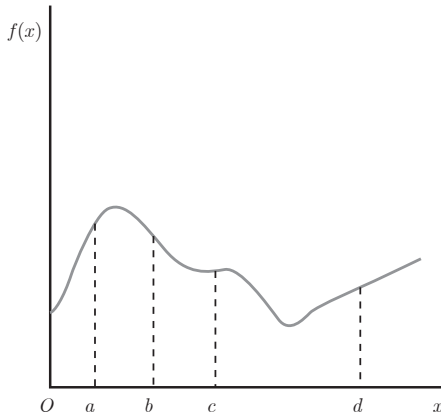
حل :

$$\text{الف) } \frac{V(1) - V(0)}{1 - 0} = \frac{39/2 - 40}{1} = -0.5 \text{ lit/s}$$

$$\text{ب) } \frac{V(100) - V(0)}{100 - 0} = V'(t) \rightarrow \frac{0 - 40}{100} = 80(-\frac{1}{100})(1 - \frac{t}{100})$$

$$\rightarrow (1 - \frac{t}{100}) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{t}{100} = \frac{1}{2} \rightarrow t = 50s$$

# نمونه سؤالات ارزشیابی

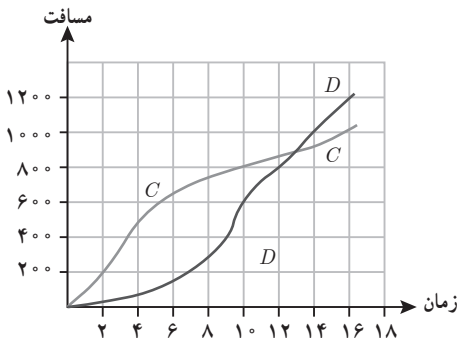
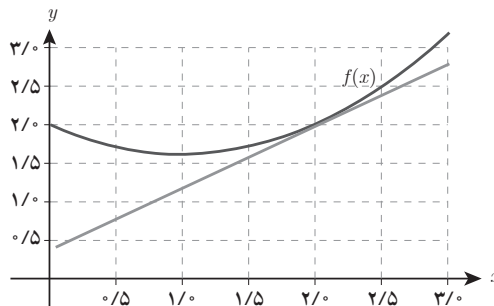


۱ فرض کنید نمودار تابع  $f$  به صورت روبه‌رو است. شیب نمودار در نقاط  $a$  و  $b$ ،  $c$ ،  $d$  را با هم مقایسه کنید.

۲

الف)  $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$  را به ازای  $h = -0.5$  تقریب بزنید. آیا این مقدار بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از  $f'(2)$  است؟ توضیح دهید.

ب) مقادیری از  $h$  را بیابید که  $\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 0$ .



۳ دو ماشین مسابقه‌ای  $C$  و  $D$  در یک پیست مسیری به‌طور مستقیم در ۱۶ ثانیه مطابق شکل روبه‌روی می‌کنند.

الف) سرعت متوسط هر دو ماشین را در ۱۶ ثانیه اول بنویسید.

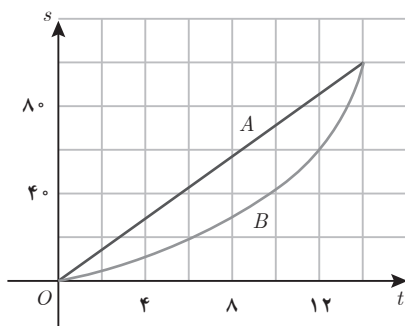
(ب) بازه‌ای با شروع  $t=4$  برای ماشین  $D$  بیابید به طوری که سرعت متوسط ماشین  $D$  تقریباً مشابه سرعت متوسط ماشین  $C$  در بازه  $t=2$  تا  $t=10$  باشد.

(پ) با استفاده از خطوط قاطع و شیب‌ها نشان دهید ماشین  $D$  در بازه  $t=4$  تا  $t=10$  دارای سرعت متوسط بالاتری نسبت به ماشین  $C$  است.

۴ فرض کنید  $f(0) = 0$ ، درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید.

(الف) اگر برای هر  $x$ ،  $f(x) \leq x$ ، آنگاه  $f'(x) \leq 1$ .

(ب) اگر برای هر  $x$ ،  $f'(x) \leq 1$ ، آنگاه  $f(x) \leq x$ .



۵ نمودار روبه‌رو تابع موقعیت دو دوندۀ  $A$  و  $B$  در یک مسابقه دو ۱۰۰ متر را نشان می‌دهد.

(الف) چگونگی حرکت دونده‌ها را مقایسه و تشریح کنید.

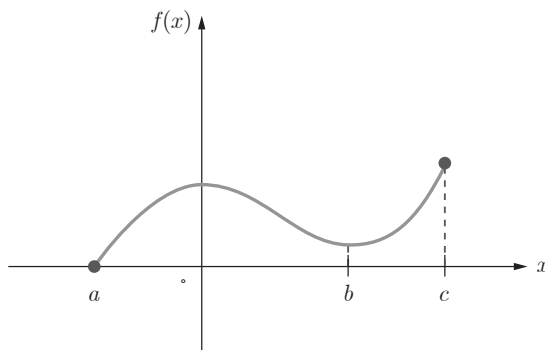
(ب) در چه زمانی تقریباً فاصله بین دو دونده بیشترین است؟

(پ) در چه زمانی تقریباً سرعت هر دو دونده یکسان است؟

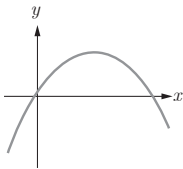
۶ برای تابع رسم شده در شکل زیر بازه یا نقاطی روی محور طول‌ها بیابید که آهنگ تغییر  $f(x)$  نسبت

به  $x$ :

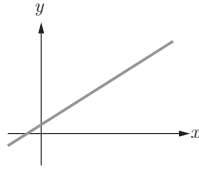
(الف) مثبت (ب) منفی (پ) صفر است.



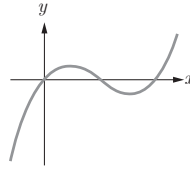
۷ توابع  $A$  و  $B$ ،  $C$ ،  $D$  را به مشتقات آنها  $I$ ،  $II$ ،  $III$  نظیر کنید.



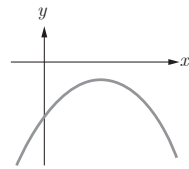
(A)



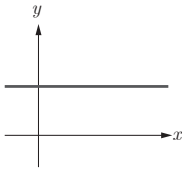
(B)



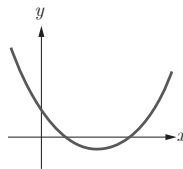
(C)



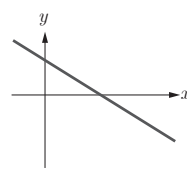
(D)



(I)



(II)



(III)

۸ بشکله‌ای حاوی یک مایع است که در پایین آن سوراخی وجود دارد و مایع در حال خروج از آن می‌باشد. حجم مایع درون بشکله در حال کاهش است و از رابطه  $V(t) = 10(2 - \frac{1}{6}t)^2$  پیروی می‌کند. سرعت خروج مایع در  $t = 4$  را محاسبه کنید.

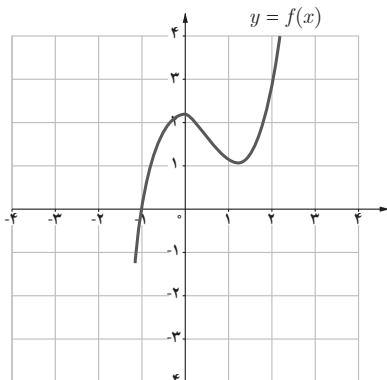
۹ از روی شکل خارج قسمت تفاضلی  $\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$  را تفسیر کنید.

الف)  $f(1)$  به چه معنی است؟

ب)  $f(1+h)$  به چه معنی است؟ مثلاً برای  $h = 0.2$ ؟

پ)  $1+h$  به چه معنی است؟

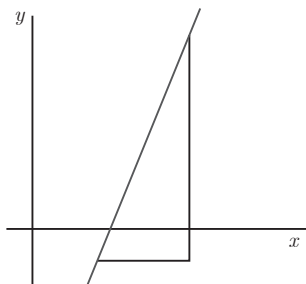
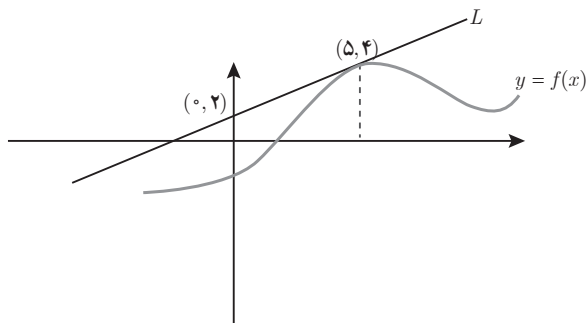
ت)  $1+h$ ،  $f(1+h)$  و  $f(1)$  را روی نمودار مشخص کنید.



ث) از روی شکل حد  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$  را تفسیر کنید.

ج) مقدار حد  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$  را برآورد کنید.

۱۰ فرض کنید خط  $L$  مماس بر نمودار تابع  $f$  در نقطه  $(5, 4)$  است.  $f(5)$  و  $f'(5)$  را به دست آورید.



۱۱ فرض کنید  $P$  و  $Q$  دو نقطه دلخواه روی نمودار باشند و تغییرات طول‌های آنها  $x$  و تغییرات عرض‌های آنها  $y$  باشد. اگر بین  $x$  و  $y$  رابطه  $y = mx + b$  برقرار باشد، مقدار  $m$  را به طور تقریبی محاسبه کنید.

۱۲ مشتق بگیرید.

۱)  $y = \sin 2x \cos 5x - 4$

۲)  $y = \cos^2 x + \tan x$

۳)  $y = (x^2 - 3x)^2 (x + 2)$

۴)  $y = x \sin x - \frac{x}{\sin x}$

۵)  $y = \frac{2x - 5}{x^2}$

۶)  $y = \frac{4x^3 - 2x^2 + 1}{x + 3}$

۱۲ آیا تابع‌های صفحه بعد در نقطه مشخص شده خط مماس دارند؟ اگر پاسخ مثبت است معادله خط مماس را بیابید.

الف)  $f(x) = \sin x$  در  $x = 0$

ب)  $f(x) = |x|$  در  $x = 1$

۱۴ در تابع  $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به متغیر روی بازه  $[2/25, 2/56]$  از آهنگ

آنی در شروع این بازه چقدر کمتر است؟

۱۵ معادله حرکت یک گلوله توپ که از زمین به طور قائم به طرف بالا پرتاب می شود به صورت

$S(t) = -5t^2 + 20t$  است. سرعت لحظه ای این گلوله در زمان برخورد با زمین چند متر بر ثانیه است؟

۱۶ در تابع با ضابطه  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر از عدد ۲ به عدد  $2+h$  تغییر

می کند برابر  $\frac{1}{9}$  است.  $h$  کدام است؟

۱۷ حجم آب یک منبع آب،  $t$  دقیقه پس از شروع تخلیه، بر حسب لیتر برابر است با:

$$V(t) = 250(16 - t)^2$$

آهنگ لحظه ای تخلیه آب بعد از ۴ دقیقه چقدر است؟ آن را توصیف کنید.

۱۸ در تابع  $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x \geq 1 \\ x^2+1 & x < 1 \end{cases}$  حاصل  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h^2) - f(1)}{h^2}$  چقدر است؟

۱۹ مشتق تابع  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$  در نقطه  $x = 1$  برابر ۳ است. اگر  $f(1) = 0$ ،  $f'(1) = -4$  و  $g'(1)$  موجود

باشد، مقدار  $g(1)$  کدام است؟

۲۰ مقدار مشتق عبارت  $y = \frac{\sin x}{1 + \tan^2 x}$  به ازای  $x = \frac{\pi}{3}$  چقدر است؟

۲۱ مقادیر  $a$  و  $b$  را به قسمی تعیین کنید که تابع  $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & x \leq 0 \\ ax+a+b & x > 0 \end{cases}$  در  $x = 0$  مشتق پذیر باشد.

۲۲ تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} ax-a & x < 1 \\ x^2-x & x \geq 1 \end{cases}$  به ازای کدام مقدار  $a$  در نقطه  $x = 1$  مشتق پذیر است؟

۲۳ فرض کنید تابع  $f$  در  $x = 1$  مشتق پذیر و  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)}{h} = 3$ ، مقدار  $f(1)$  و  $f'(1)$  را به دست آورید.

# کاربردهای مشتق



## فصل

- ۱ اکستریم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی
- ۲ جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن
- ۳ رسم نمودار توابع

کرده حیران (اردبیل)

سرعت لحظه‌ای یک اتومبیل، با مشتق معادله مکان - زمان نسبت به زمان و یا شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان است. شتاب لحظه‌ای، مشتق دوم معادله مکان نسبت به زمان است.

## کاربردهای مشتق

### اهداف کلی فصل ۵

دانش‌آموزان در فصل قبل با مفهوم مشتق آشنا شده‌اند و مهارت‌های محاسبه مشتق توابع مختلف را کسب کرده‌اند. در این فصل وقت آن رسیده است دانش‌آموزان پاسخ این سؤال را دریافت کنند که مشتق در کجا به کار می‌آید؟

بعد از یادگیری هر مسئله یا مطلب تئوری ریاضی، نخستین سؤالی که به ذهن می‌آید این است که دانستن این موضوع چه فایده عملی می‌تواند برای ما داشته باشد؟ گرچه ریاضی درس شیرینی است، اما بسیاری از دانش‌آموزان در کلاس این درس از خود می‌پرسند این مباحث به چه درد ما می‌خورد؟ متأسفانه بسیاری از کاربردهای مهم و جالب ریاضی نیازمند آشنایی با مباحث پیچیده تئوری و سطح بالای دانشگاهی است. البته این به معنای آن نیست که نمی‌توان کاربردهای ساده و سطح پایین ریاضی که قابل درک برای عموم دانش‌آموزان راهنمایی یا دبیرستان باشد پیدا کرد.

در این فصل کاربردهایی از مشتق بیان می‌شود که شامل یافتن اکسترم‌های نسبی و مطلق تابع و حل مسائل بهینه‌سازی و رسم نمودار توابع می‌باشد. بهینه‌سازی یک کاربرد ملموس از مشتق در امور روزمره می‌باشد که می‌تواند برای دانش‌آموزانی که همواره به دنبال کاربرد ریاضیات در امور روزمره هستند جالب باشد.

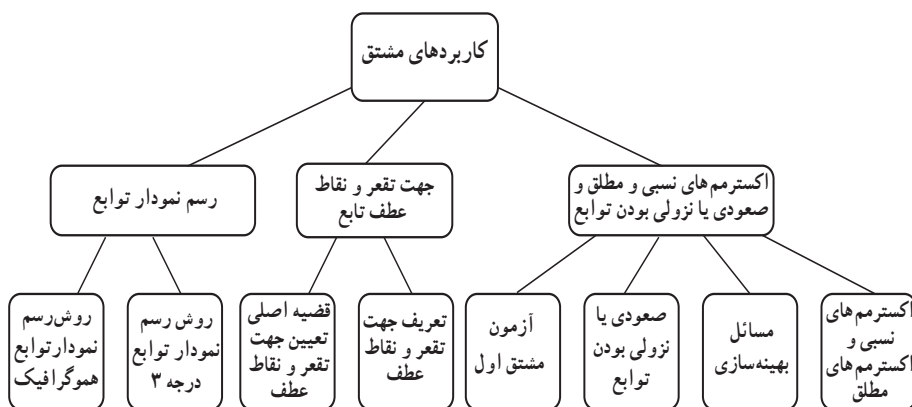
در درس اول مفاهیم ماکسیمم و مینیمم نسبی توابع و همچنین ماکسیمم و مینیمم مطلق توابع به‌طور دقیق تعریف می‌شوند و از روی ضابطه توابع و نمودار آنها، تفهیم کامل می‌شود. سپس قضیه اکسترم (یا قضیه قرینه) که بیان می‌دارد اگر تابع  $f$  دربارهٔ بسته  $[a, b]$  پیوسته باشد آنگاه در این بازه حتماً دارای ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق می‌باشد بیان می‌گردد. با کمک این قضیه دو مسئله بهینه‌سازی حل می‌شوند. سپس با استفاده از یک قضیه، رابطه مشتق تابع و صعودی یا نزولی بودن تابع بیان می‌گردد و روش یافتن اکسترم‌های نسبی تابع با کمک آزمون مشتق اول بیان می‌شود.



در درس دوم ابتدا مفهوم جهت تقعر تابع با رسم نمودارهایی بیان می‌شود و رابطه جهت تقعر و مشتق دوم به صورت مفهومی تدریس می‌شود و در نهایت، قضیه‌ای که این ارتباط را بیان می‌دارد گفته می‌شود. سپس نقطه عطف تابع تعریف می‌شود و روش محاسبه آن که با استفاده از مشتق دوم صورت می‌گیرد، بیان می‌گردد.

در درس سوم روش رسم نمودار توابع با استفاده از اطلاعاتی که از درس‌های اول و دوم حاصل شده است بیان می‌شود و روش‌های رسم نمودار توابع درجه سوم و نمودار توابع هموگرافیک با مثال‌هایی توضیح داده می‌شود.

### نقشه مفهومی



## تصویر عنوانی

در تصویر ابتدای فصل بخشی از یک جاده بیرون شهری (واقع در گردنه حیران اردبیل) که تقریباً شبیه نمودار سهمی می‌باشد آورده شده است. مشتق توابع در رسم نمودار آنها و همچنین بررسی ویژگی‌ها و نقاط خاص این گونه نمودارها مانند نقاط اکسترمم نسبی و عطف، کاربرد فراوانی دارد. همچنین با داشتن معادله حرکت یک جسم مانند اتومبیل، به کمک مشتق می‌توان سرعت و شتاب آن را محاسبه نمود.

## دانستنی‌هایی برای معلم

یکی از کاربردهای مهم مشتق تعیین شیب خط مماس بر منحنی (در صورت وجود) می‌باشد که در فصل قبل ضمن بیان درس، این کاربرد هم بررسی شده است.

یکی دیگر از کاربردهای مهم مشتق قاعده هوییتال می‌باشد. با کمک این قاعده بسیاری از حدهایی که برای آنها حالت مبهم  $\frac{0}{0}$  یا  $\frac{\infty}{\infty}$  رخ می‌دهد را بسیار ساده‌تر از روش‌های اولیه آنها می‌توان رفع ابهام کرد. صورت قاعده هوییتال به صورت زیر است:

$$\text{اگر } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ آنگاه در صورت وجود } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ آنگاه}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\text{اگر } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty} \text{ با توجه به اینکه } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}}{\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)}} \text{ و به کارگیری قاعده هوییتال برای}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{حد } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} \text{ می‌توان نتیجه گرفت:}$$

یعنی قاعده هوییتال را برای حالت مبهم  $\frac{\infty}{\infty}$  نیز می‌توان به کار برد.

بنابراین از قاعده هوییتال می‌توان در رفع ابهام حدهایی که تجزیه صورت و مخرج آنها بعضاً بسیار دشوار

می‌باشد استفاده نمود؛ مثلاً برای محاسبه حد  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{x} - 1}{x^3 + \cos(x - 1) - 2}$  که حالت مبهم  $\frac{0}{0}$  می‌شود

داریم :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{x} - 1}{x^3 + \cos(x-1) - 2} \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}}{3x^2 - \sin(x-1)} = \frac{\frac{1}{5}}{3-0} = \frac{1}{15}$$

جالب است بدانید که قاعده هوییتال در واقع متعلق به هوییتال (گیوم لوییتال) نمی باشد و متعلق به یوهان برنولی (معلم هوییتال) می باشد.

پیشرفت حساب دیفرانسیل و انتگرال در قرن هفدهم میلادی توسط آگوستین لویی کوشی، برنارد ریمان و برادران برنولی (ژاکوب و یوهان) صورت پذیرفت. در سال ۱۶۹۶ هوییتال خلاصه ای از درس هایی که یوهان برنولی به او داده بود را در کتابی به نام «آنالیز بی نهایت کوچک ها برای بررسی منحنی ها» منتشر کرد که در این کتاب قاعده رفع ابهام حد با استفاده از مشتق که به قاعده هوییتال معروف است نیز آمده است. آزمون مشتق اول آزمونی برای یافتن اکسترم های نسبی یک تابع می باشد اما آزمون دیگری هم برای این کار وجود دارد که به آزمون مشتق دوم معروف است و در این فصل به آن اشاره ای نشده است. علت اینکه آن را آزمون مشتق دوم می نامند، استفاده از مشتق دوم تابع برای تعیین نقاط اکسترم نسبی است. (به جای رسم جدول تعیین علامت  $y'$ )

آزمون مشتق دوم به صورت زیر بیان می شود :

فرض کنید تابع  $f$  در نقطه  $a$  دارای مشتق دوم باشد و  $f'(a) = 0$  در این صورت :

الف) اگر  $f''(a) > 0$  باشد آنگاه  $a$  طول نقطه مینیمم نسبی  $f$  می باشد.

ب) اگر  $f''(a) < 0$  باشد آنگاه  $a$  طول نقطه ماکسیمم نسبی  $f$  می باشد.

پ) اگر  $f''(a) = 0$  باشد این آزمون بی نتیجه است.

به عنوان مثال برای تعیین نقاط اکسترم نسبی مثال صفحه ۱۲۳ کتاب درسی به کمک آزمون مشتق دوم

داریم :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 6$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$f''(x) = 6x - 4 \rightarrow \begin{cases} f''(2) = 8 \Rightarrow x = 2 \text{ طول نقطه مینیمم تابع } f \text{ می باشد.} \\ f''(-\frac{2}{3}) = -8 \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \text{ طول نقطه ماکسیمم تابع } f \text{ می باشد.} \end{cases}$$

## نمونه سؤالات ارزشیابی فصل ۵

۱ در تابع  $f(x) = \frac{x^3 + b}{ax^2}$  نقطه  $M(2, 3)$  نقطه اکسترمم نسبی است. مقادیر  $a$  و  $b$  را بیابید.

(جواب:  $a=1$  و  $b=4$ )

۲ اگر تابع  $f(x) = ax^3 + bx + cx + d$  در نقاط  $(1, 2)$  و  $(2, 3)$  دارای اکسترمم نسبی باشد مقادیر  $a, b, c$  و

$d$  را بیابید.

(جواب:  $a=-2$ ,  $b=9$ ,  $c=-12$ ,  $d=7$ )

۳ اگر  $A(-3, 4)$  نقطه ماکسیمم نسبی تابع  $y = \frac{x^2 + ax + b}{x+1}$  باشد مقادیر  $a$  و  $b$  را بیابید.

(جواب:  $a=2$  و  $b=5$ )

۴ اکسترمم‌های نسبی تابع  $y = x^3 + 6x^2 - 63x + 1$  را بیابید.

(جواب  $(-7, 393)$  و  $(3, -107)$ )

۵ تابع  $y = x^4 - 4x + 2$  در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است؟

۶ مینیمم مقدار تابع  $y = x^4 - x^2 + 3$  را روی بازه  $[0, 1]$  بیابید.

(جواب:  $\frac{11}{4}$ )

۷ در مخروطی به شعاع ۴ سانتی‌متر و ارتفاع ۶ سانتی‌متر یک استوانه محاط می‌کنیم. ماکسیمم

مساحت جانبی استوانه را بیابید.

(جواب:  $12\pi$ )

۸ در یک مخروط مجموع شعاع قاعده و ارتفاع برابر ۳ سانتی متر است. ماکسیمم حجم این مخروط را بیابید.

$$\left( \text{جواب} = \frac{4\pi}{3} \right)$$

۹ استوانه‌ای با ماکسیمم حجم در داخل کره‌ای به شعاع  $\sqrt{3}$  محاط شده است. ارتفاع این استوانه را بیابید.

$$(\text{جواب} : 20)$$

۱۰ از میان مثلث‌هایی که مجموع طول قاعده و ارتفاع وارد بر آن برابر ۱۶ سانتی متر است، مثلثی که بیشترین مساحت را دارد اختیار کرده‌ایم. مساحت این مثلث را بیابید.

$$(\text{جواب} : 32)$$

۱۱ اگر نقطه  $(1, 2)$  نقطه عطف تابع  $y = ax^2 + bx^2$  باشد، مقادیر  $b, a$  را بیابید.

$$(\text{جواب} : a = -1, b = 3)$$

۱۲ جهت تقعر و نقاط عطف تابع  $y = \frac{x}{1+x^2}$  را بیابید.

۱۳ جهت تقعر و نقاط عطف تابع  $y = x^4 - 8x^3 - 72x^2 + 25x - 4$  را بیابید.

۱۴ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف)  $y = x^3 - 4x + 5$

ب)  $y = 8x^3 - 48x^2 + 96x - 64$

پ)  $y = \frac{x+1}{2x+4}$

# اکستریم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

۱

درس

## اهداف درس

- ۱ دانش‌آموز درک دقیق و شفاف از ماکسیمم و مینیمم نسبی تابع داشته باشد و فرق بین مقدار اکستریم نسبی و نقطه اکستریم نسبی و طول نقطه اکستریم نسبی را تشخیص دهد.
- ۲ دانش‌آموز با دیدن نمودار یک تابع بتواند نقاط اکستریم نسبی آن را تشخیص دهد.
- ۳ دانش‌آموز تعریف ماکسیمم و مینیمم مطلق و فرق آنها با مینیمم نسبی و ماکسیمم نسبی را درک کند.
- ۴ دانش‌آموز بتواند با کمک اکستریم‌های مطلق، مقادیر بهینه برای ماکسیمم‌سازی یا مینیمم‌سازی در مسائل کاربردی را محاسبه کند.

## روش تدریس

شروع این درس با یک مثال از تابع دما - زمان می‌باشد که مفهوم اکستریم‌های نسبی در آن توضیح داده شده است. معلم می‌تواند با مثال‌هایی مشابه سرعت - زمان (مربوط به سرعت حرکت یک اتومبیل در طول یک بازه زمانی) این مفاهیم را کامل‌تر توضیح دهد.

معلم بر فرق بین مقدار ماکسیمم نسبی، نقطه ماکسیمم نسبی و طول نقطه ماکسیمم نسبی و به همین شکل در مورد مینیمم نسبی تأکید کند تا دانش‌آموز به‌طور دقیق این اصطلاحات را به کار گیرد. همچنین تعریف

ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق و بیان فرق آنها و وجود یا عدم وجود آنها و مقادیر آنها با مقادیر ماکسیمم و مینیمم نسبی با استفاده از نمودار توابع و ضابطه آنها به طور دقیق صورت گیرد. کاردر کلاس صفحه ۱۱۳ برای تفهیم این مفاهیم و مقایسه اختلافات آنها می باشد. فعالیت صفحه ۱۱۵ برای تفهیم اکسترم های نسبی و مطلق در نقاطی که تابع مشتق ندارد یا پیوسته نیست می باشد و در ادامه آن با انجام فعالیت صفحه ۱۱۶ دانش آموز آماده برای یادگیری قضیه صفحه ۱۱۶ که به قضیه اکسترم معروف است می گردد.

با توجه به این قضیه لزوم تعریف نقاط بحرانی برای یافتن اکسترم های مطلق در یک بازه احساس می گردد. پس از تعریف نقاط بحرانی، دانش آموز آمادگی حل مسئله های بهینه سازی کاربردی را دارد که دو مثال صفحه ۱۱۸ و ۱۱۹ نمونه هایی از این مثال ها می باشند.

مثال ابتدای صفحه ۱۱۸ مثالی است که در آن تمامی حالت های نقاط بحرانی وجود دارد و از این منظر مثال مناسبی است.

بخش بعدی درس اول مربوط به یافتن بازه هایی می باشد که تابع در آنها صعودی یا نزولی می باشد. مفهوم صعودی یا نزولی بودن تابع در فصل اول کتاب بیان شده است و در این درس رابطه بین صعودی یا نزولی بودن تابع با مثبت یا منفی بودن مشتق تابع بررسی می شود. فعالیت صفحه ۱۲۰ به طور شهودی به دانش آموز می فهماند که رابطه بین صعودی بودن تابع و مثبت بودن مشتق تابع در یک بازه و همچنین رابطه بین نزولی بودن تابع و منفی بودن مشتق تابع در یک بازه چیست و با توجه به این فعالیت قضیه صفحه ۱۲۱ که نتیجه آن فعالیت است بیان می شود. فعالیت صفحه ۱۲۲ ذهن دانش آموز را برای بیان آزمون مشتق اول آماده می کند. در این فعالیت به طور شهودی دانش آموز در می یابد که اگر تابع در نقطه ای پیوسته باشد و در همسایگی آن تعریف شده باشد و قبل از آن تابع صعودی و بعد از آن نزولی باشد آن نقطه، نقطه ماکسیمم نسبی و اگر قبل از آن نزولی و بعد از آن صعودی باشد، آن نقطه مینیمم نسبی تابع می باشد.

مثال صفحه ۱۲۳ بیان می دارد که چگونه با کمک آزمون مشتق اول می توان اکسترم های نسبی یک تابع را یافت. کار در کلاس صفحه ۱۲۴ مورد مناسبی است برای بررسی ارتباط بین رفتار یک تابع و رفتار مشتق آن. در این مورد بر عکس عمل شده است یعنی از روی نمودار تابع  $f$  ویژگی هایی از تابع  $f$  مانند صعودی یا نزولی بودن و اکسترم های نسبی بررسی می شوند.

## جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن

### اهداف درس

- ۱ دانش آموز مفهوم دقیق جهت تقعر منحنی را درک کند و بتواند از روی نمودار تابع جهت تقعر آن را تشخیص دهد.
- ۲ دانش آموز روش تعیین جهت تقعر تابعی که ضابطه آن داده شده است را بیاموزد.
- ۳ دانش آموز با مفهوم نقطه عطف آشنا شود.
- ۴ دانش آموز روش تعیین نقطه عطف یک تابع را که ضابطه آن داده شده است فرا گیرد.

### روش تدریس

در شروع این درس مفهوم جهت تقعر بیان شده است و دانش آموز در می یابد که اگر در یک بازه، نمودار تابع بالای خطوط مماس بر منحنی در آن بازه قرار گیرد جهت تقعر در آن بازه به سمت بالاست و اگر نمودار زیر خطوط مماس قرار گیرد جهت تقعر در آن بازه رو به سمت پایین است. در فعالیت صفحه ۱۲۸ سعی شده است رابطه بین علامت مشتق دوم تابع در یک بازه و جهت تقعر منحنی تابع در آن بازه بیان شود. در شکل (الف) ملاحظه می شود که شیب خط های مماس در حال افزایش هستند یعنی مشتق در این بازه صعودی است یعنی  $f''(x)$  مثبت است و در شکل (ب) ملاحظه می شود که شیب خط های مماس در حال کاهش هستند یعنی تابع  $f'$  نزولی است که به معنی منفی بودن  $f''$  در این بازه است. این نکته در قالب قضیه صفحه ۱۲۹ بیان شده است.

قسمت (پ) این قضیه حائز اهمیت است و لازم است معلم با ذکر مثال هایی مناسب مانند توابع  $y=x^4$ ,  $y=x^3$  و  $y=-x^4$  این قسمت را به طور شفاف توضیح دهد. در کار در کلاس صفحه ۱۳۰ هدف سنجش میزان یادگیری مفهوم جهت تقعر توسط دانش آموز می باشد. در قسمت دوم درس دوم نقطه عطف تابع تعریف می شود. پس از تعریف روی بخشی از تعریف که بیان می دارد «در نقطه عطف باید خط مماس موجود باشد» تمرکز می کنیم و با مثال هایی نموداری و ضابطه ای این مفهوم را روشن می کنیم (مانند تابع  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ) سپس با استدلال بیان می داریم که مشتق دوم در صورت وجود در نقطه عطف برابر صفر می باشد. کار در کلاس صفحه ۱۳۲ مهارت دانش آموز در تشخیص نقاط عطف یک تابع را می سنجد. کار در کلاس صفحه ۱۳۵ رابطه بین رفتار  $f'$  با جهت تقعر  $f$  و همچنین صعودی یا نزولی بودن  $f$  را بیان می دارد.



## رسم نمودار توابع

## اهداف درس

- ۱ آشنایی با مفهوم نمودار یک تابع
- ۲ بیان رابطه بین علامت مشتق اول و دوم تابع با رفتار تابع و جمع آوری آنها در قالب یک جدول تعیین علامت شامل تغییرات  $x$ ،  $f(x)$  و  $f'(x)$  و  $f''(x)$ .
- ۳ توانایی رسم نمودار توابع درجه ۳ و توابع هموگرافیک.

## روش تدریس

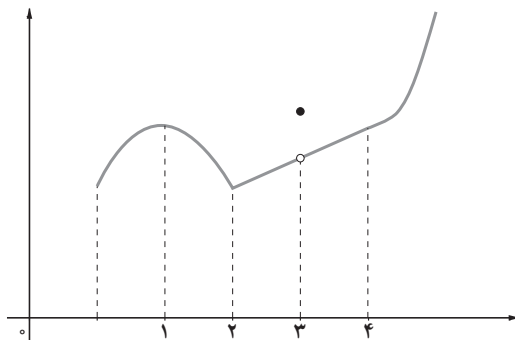
در ابتدا مفهوم نمودار تابع برای دانش آموز بیان می شود که به دانش آموز تفهیم می شود که هر نقطه از تابع معادل یک نقطه از صفحه دکارتی می باشد و تمام نقاط متناظر اگر در صفحه دکارتی تعیین شوند یک نمودار حاصل می شود که به آن منحنی نمودار تابع گفته می شود.

سپس با یادآوری رابطه بین علامت مشتق اول و مشتق دوم با رفتار تابع، نیاز به محاسبه مشتق اول تابع جهت تعیین صعودی یا نزولی بودن تابع و یافتن اکسترم های نسبی آن و همچنین مشتق دوم تابع جهت تعیین جهت تقعر و نقاط عطف تابع بیان می گردد. سپس بیان شود که برای جمع بندی رفتار  $f'$ ،  $f''$ ، هر دوی آنها را همراه با تغییرات  $x$ ،  $f(x)$  در یک جدول ارائه می دهیم و با استفاده از این جدول نمودار تابع  $f(x)$  را رسم می کنیم. اگر لازم شد از چند نقطه کمکی هم برای رسم دقیق تر نمودار استفاده می کنیم.

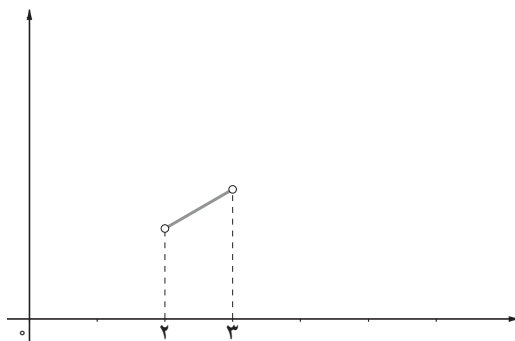
رسم نمودار توابع درجه ۳ تمرین خوبی برای این درس می باشد. فقط توجه شود که در حالت کلی امکان حل معادله درجه ۳ وجود ندارد پس یافتن نقاط برخورد نمودار تابع با محور  $x$  در حالت کلی امکان پذیر نیست و لازم است مثال ها طوری طراحی شوند که معادله درجه ۳ قابل تجزیه باشد مانند مثال دوم در صفحه ۱۳۹.

یکی از توابع معروف در ریاضی تابع هموگرافیک است که به صورت  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  که  $C \neq 0$  و  $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$  می باشد. رسم نمودار این توابع نیز در این درس مورد توجه واقع شده است. تفاوت نمودار این توابع با توابع درجه ۳ وجود مجانب های افقی و قائم می باشد. معلم لازم است تا مفاهیم مجانب های افقی و عمودی را برای دانش آموز یادآوری کرده و سپس رسم نمودار توابع هموگرافیک را به ترتیب بیان شده توضیح دهد.

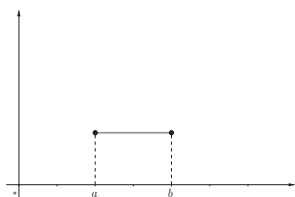
۱



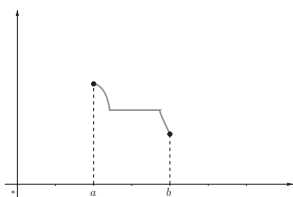
۲



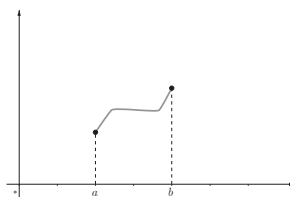
۳



(الف)

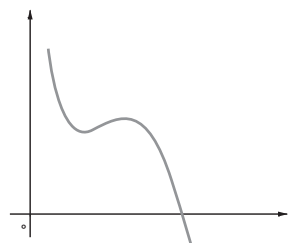


(ب)

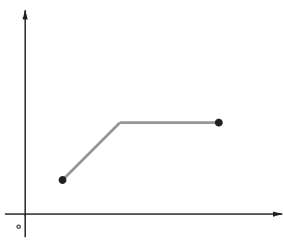


(ج)

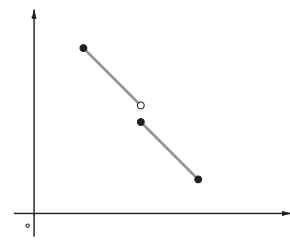
۴



(الف)

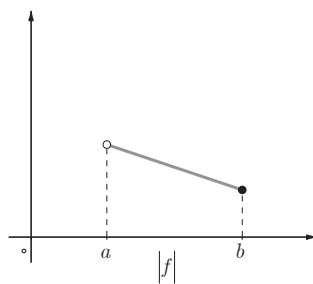
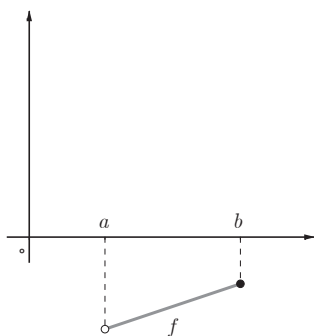


(ب)



(ج)

۵



۶

(الف)

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 5 \quad [-2, 1]$$

$$f'(x) = 6x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3} \rightarrow \text{نقاط بحرانی: } x = \frac{1}{3}, -2, 1$$

$$f(-2) = 21 \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{14}{3} \quad f(1) = 6$$

$$\Rightarrow \text{مقدار ماکسیمم مطلق تابع} = 21 \quad \text{مقدار مینیمم مطلق تابع} = \frac{14}{3}$$

$x$		$\frac{1}{3}$	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

نقطه مینیمم نسبی تابع  $\left(\frac{1}{3}, \frac{14}{3}\right)$

مینیمم نسبی

(ب)

$$f(x) = x^3 - 3x \quad [-1, 2]$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow \text{نقاط بحرانی } x = \pm 1 \text{ و } 2$$

$$f(-1) = 2, \quad f(1) = -2, \quad f(2) = 2$$

$$\Rightarrow \text{مقدار ماکسیمم مطلق تابع} = 2 \quad \text{مقدار مینیمم مطلق تابع} = -2$$

$x$	-1	1	2
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	2	-2	2

نقطه مینیمم نسبی تابع  $(1, -2)$

مینیمم نسبی

(ب)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 2 \\ 4 - x & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \sqrt{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{تابع } f \text{ در } 2 \text{ پیوسته نیست} \quad \text{تابع } f \text{ در } 2 \text{ مشتق ندارد}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & 0 < x < 2 \\ -1 & x > 2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad f'(x) = 0 \quad \text{داریم } (0, 2) \cup (2, +\infty) \quad \text{در تمام نقاط}$$

بنابراین :

نقاط بحرانی :  $x=2$

$$f(0) = 0 \quad f(2) = 2$$

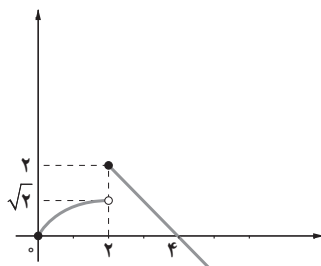
$= 2$  مقدار ماکسیمم مطلق تابع

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (4-x) = -\infty \quad \rightarrow \quad \text{تابع } f \text{ مینیمم مطلق ندارد.}$$

$$x \rightarrow +\infty$$

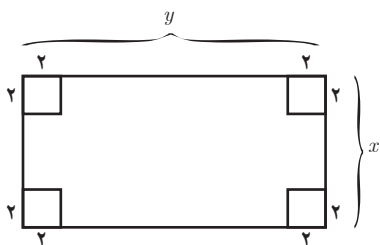
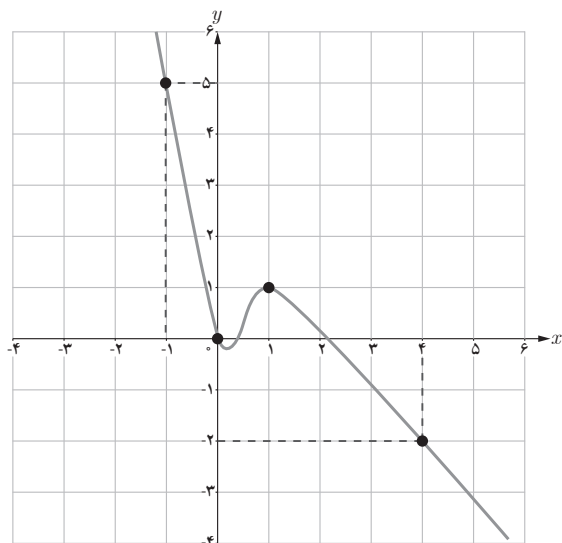
$$= 2 \text{ ماکسیمم نسبی تابع} \quad (2, 2) = \text{نقطه ماکسیمم نسبی تابع}$$

توجه شود که نمودار این تابع به صورت زیر می باشد :



$$f(x) = 3x^2 + a$$

$$\begin{cases} f(1) = 2 \rightarrow 3 + a(1) + b = 2 \rightarrow a + b = -1 \\ f'(1) = 0 \rightarrow 3(1)^2 + a = 0 \rightarrow a = -3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad b = 4 \quad \square$$



۹ فرض کنید  $y$  طول و  $x$  عرض مستطیل باشد.

$$\text{حجم مکعب حاصل} = 2(x-4)(y-4) \xrightarrow{xy=100} \rightarrow$$

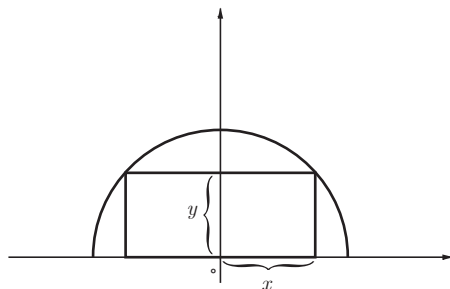
$$\text{تابع حجم مکعب} = f(x) = 2(x-4)\left(\frac{100}{x}-4\right) = 232 - 8x - \frac{800}{x} \quad x \in [4, 10]$$

$$f'(x) = -8 + \frac{800}{x^2} = 0 \rightarrow -8x^2 + 800 = 0 \rightarrow x = 10 \rightarrow \text{نقطه بحرانی تابع} : x = 10 \text{ و } 4 \text{ و } 10$$

$$f(10) = 72, \quad f(4) = 0$$

$$\Rightarrow \text{مقدار ماکسیمم مطلق تابع} = 72$$

به ازای  $x = 10$  و  $y = \frac{100}{x} = \frac{100}{10} = 10$  ماکسیمم مطلق حاصل می شود.



$$\text{معادله دایره} = x^2 + y^2 = 16 \rightarrow y = \sqrt{16 - x^2}$$

$$\text{مساحت مستطیل} = 2xy$$

$$\text{تابع مساحت مستطیل} = f(x) = 2x\sqrt{16 - x^2} \quad x \in [0, 4]$$

$$f'(x) = 2\sqrt{16 - x^2} + 2x \frac{-x}{\sqrt{16 - x^2}} = 0 \rightarrow \frac{2(16 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow 32 - 4x^2 = 0 \rightarrow x = \sqrt{8}$$

$$\text{نقطه بحرانی تابع} : x = \sqrt{8}$$

$$f(0) = 0, f(\sqrt{8}) = 16, f(4) = 0$$

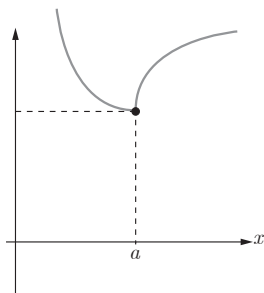
مقدار ماکسیمم مطلق تابع  $f$  در بازه  $[0, 4]$  برابر ۱۶ می باشد که به ازای طول  $2\sqrt{8}$  و عرض  $\sqrt{8}$  حاصل می شود.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases} \quad \text{الف)}$$

$x$	-1	2
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	↗	↘

$$f'(x) = \frac{x-2-x}{(x-2)^2} = \frac{-2}{(x-2)^2} \quad \text{ب)}$$

$f'(x)$  در  $x = 2$  وجود ندارد و در  $\mathbb{R} - \{2\}$  همواره منفی است پس تابع  $f$  در  $\mathbb{R} - \{2\}$  نزولی است.



الف)  $f'(x) = x^2 - 2x - 3$

$f''(x) = 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1$

$x$	۱	
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	∩	∪

عطف

نقطه عطف:  $x = 1$ 

ب)  $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$

$f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$

$x$	۱	
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	∩	∪

$x = 1$  عضو دامنه تابع نمی باشد بنابراین تابع  $f$  فاقد نقطه عطف می باشد.

ب)  $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

$f''(x) = \frac{-2(x+1)}{9\sqrt[3]{(x+1)^4}} = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(x+1)^5}}$

$x$	-۱	
$f''(x)$	+	-
$f(x)$	∪	∩

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} = +\infty$$

چون جهت تقعر تابع در  $x = -1$  عوض شده و خط مماس در  $x = -1$  وجود دارد (به صورت قائم است) پس  $x = -1$  نقطه عطف تابع می باشد.



(الف)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$$

$$f(0) = 0 \rightarrow d = 0$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$f''(0) = 0 \rightarrow b = 0$$

$$f(x) = ax^3 + cx \xrightarrow[c=1, a=1]{\text{به دلخواه}} f(x) = x^3 + x$$

(ب)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$$

$$f(1) = 0 \rightarrow a + b + c + d = 0$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$f''(1) = 0 \rightarrow 6a + 2b = 0 \rightarrow b = -3a$$

به دلخواه قرار می دهیم  $a = 1$  و  $c = 0$  داریم:  $d = 2$  و  $b = -3$  پس  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

(ب)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$$

$$f(0) = 1 \rightarrow d = 1$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$f''(0) = 0 \rightarrow b = 0$$

به دلخواه قرار می دهیم  $a = 1$  و  $c = 1$  داریم:  $f(x) = x^3 + x + 1$

(ت)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$$

$$f(2) = 2 \rightarrow 8a + 4b + 2c + d = 2$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$f''(2) = 0 \rightarrow 12a + 2b = 0 \rightarrow b = -6a$$

به دلخواه قرار می دهیم  $a = 1$  و  $c = 0$  داریم:  $b = -6$  و  $d = 18$  بنابراین  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 18$

$$f(\circ) = \text{۱} \rightarrow c = \text{۱}$$

$$f(\text{۱}) = \text{۲} \rightarrow a + b + c = \text{۲} \xrightarrow{c=\text{۱}} a + b = \text{۱}$$

$$f'(x) = \text{۳}ax^{\text{۲}} + \text{۲}bx$$

$$f''(x) = \text{۶}ax + \text{۲}b$$

$$f''\left(\frac{\text{۱}}{\text{۳}}\right) = \circ \rightarrow \text{۳}a + \text{۲}b = \circ$$

$$\begin{cases} a + b = \text{۱} \\ \text{۳}a + \text{۲}b = \circ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -\text{۲} \\ b = \text{۳} \end{cases}$$

۲ و ۲- نقاط اکسترمم نسبی تابع  $f(x)$  می‌باشند بنابراین

$$f'(\text{۲}) = \circ, \quad f'(-\text{۲}) = \circ$$

چون  $(\circ, \circ)$  نقطهٔ عطف تابع  $f(x)$  است پس  $f''(\circ) = \circ$

چون تابع  $f(x)$  از نقطهٔ  $(\circ, \circ)$  عبور کرده است پس  $f(\circ) = \circ$

$$f(\circ) = \circ \rightarrow c = \circ$$

$$f'(x) = \text{۳}x^{\text{۲}} + \text{۲}ax + b$$

$$f'(-\text{۲}) = \circ \rightarrow \text{۱۲} - \text{۴}a + b = \circ$$

$$f'(\text{۲}) = \circ \rightarrow \text{۱۲} + \text{۴}a + b = \circ$$

$$f''(x) = \text{۶}x + \text{۲}a$$

$$f''(\circ) = \circ \rightarrow a = \circ \Rightarrow b = -\text{۱۲}$$

(الف)

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 1$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

نمودار در نقطه  $(1, 0)$  محور  $y$  ها را قطع می کند  $f(0) = 1$

$$f(x) = 0 \rightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$$

پس نمودار در نقاط  $(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, 0)$  و  $(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, 0)$  محور  $x$  ها را قطع می کند.

$$f'(x) = 4x - 4 = 0 \rightarrow x = 1$$

$$f(1) = -1$$

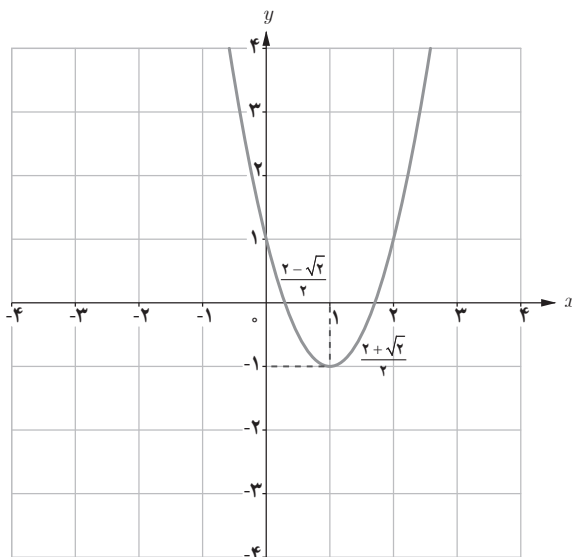
$$f''(x) = 4$$

بنابراین نقطه  $(1, -1)$  نقطه اکسترمم نسبی تابع است.

بنابراین  $f'''(x)$  همواره مثبت است و در هیچ نقطه ای صفر نمی شود پس تابع نقطه عطف ندارد.

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$y'$	$-$	$0$	$+$
$y''$	$(+)$	$(+)$	$(+)$
$y$	$\searrow$	$-1$	$\nearrow$

مینیمم نسبی



$$f(x) = x^3 - 5x + 5$$

ب)

$$D_f = \mathbb{R}$$

نمودار در نقطه  $(5, 0)$  محور  $y$  ها را قطع می کند  $\rightarrow f(0) = 5$

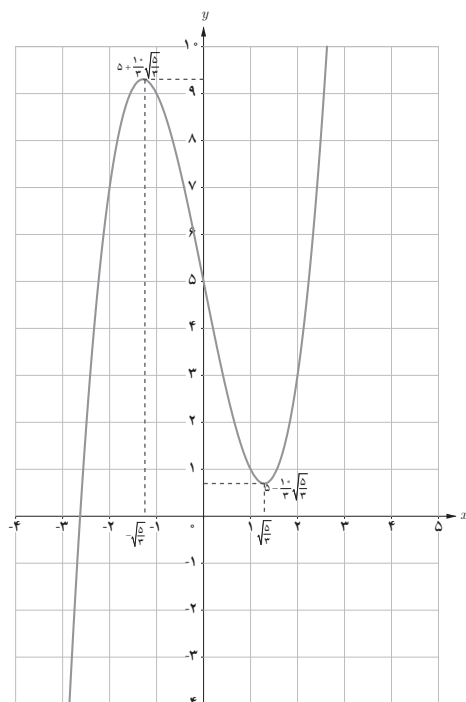
حل این معادله با روش های معمول امکان پذیر نیست.  $\rightarrow f(x) = 0 \rightarrow x^3 - 5x + 5 = 0$

$$f'(x) = 3x^2 - 5 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$$

پس نقاط  $(\sqrt{\frac{5}{3}}, 5 - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{3}})$  و  $(-\sqrt{\frac{5}{3}}, 5 + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{3}})$  نقاط اکسترمم نسبی تابع هستند.

نقطه  $(0, 5)$  نقطه عطف تابع است.  $f'''(x) = 6x = 0 \rightarrow x = 0$

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{5}{3}}$	$0$	$\sqrt{\frac{5}{3}}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f''(x)$	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)
$f(x)$	↗	↘	↗	↗	↗



(ب)

$$f(x) = -x(x+2)^2$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

تابع در نقطه  $(\circ, \circ)$  محور  $y$  ها را قطع می کند.  $\rightarrow f(\circ) = \circ$

$$f(x) = \circ \rightarrow -x(x+2)^2 = \circ \rightarrow \begin{cases} x = \circ \\ x = -2 \end{cases}$$

پس تابع در نقاط  $(\circ, \circ)$  و  $(-2, \circ)$  محور  $x$  ها را قطع می کند.

$$f'(x) = -(x+2)^2 - 2x(x+2) = \circ \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

پس نقاط  $(-2, \circ)$  و  $(-\frac{2}{3}, \frac{32}{27})$  اکسترم‌های نسبی تابع  $f$  می باشند.

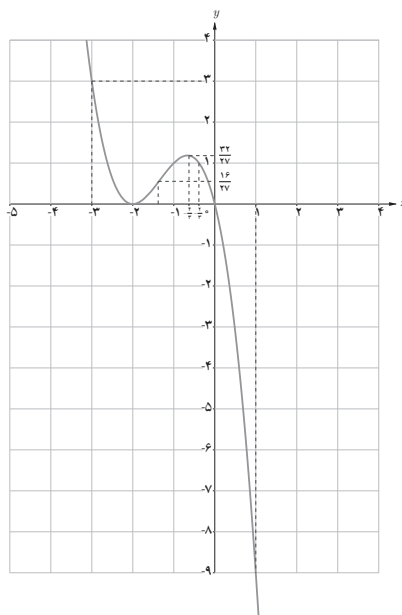
$$f''(x) = -6x - 4 = \circ \rightarrow x = -\frac{4}{3}$$

نقطه  $(-\frac{4}{3}, \frac{16}{27})$  نقطه عطف تابع می باشد.

$x$	$-\infty$	$-2$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
$y'$		$-$	$+$	$+$	$-$
$y''$		$(+)$	$(+)$	$(-)$	$(-)$
$y$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$
		$\circ$	$\frac{16}{27}$	$\frac{32}{27}$	

نقاط کمکی

$x$	$-3$	$1$
$y$	$3$	$-9$



$$f(x) = \frac{2x-1}{x-2} \quad \text{ت}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1}{x-2} = +\infty$$

$\Rightarrow$  خط  $x=2$  مجانب عمودی تابع می باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1}{x-2} = -\infty$$

خط  $y=2$  مجانب افقی تابع می باشد.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$

$$f(0) = \frac{1}{2}$$

بنابراین تابع در نقطه  $(\frac{1}{2}, 0)$  محور  $y$  ها را قطع می کند.

$$f(x) = 0 \rightarrow \frac{2x-1}{x-2} = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

پس تابع در نقطه  $(0, \frac{1}{2})$  محور  $x$  ها را قطع می کند.

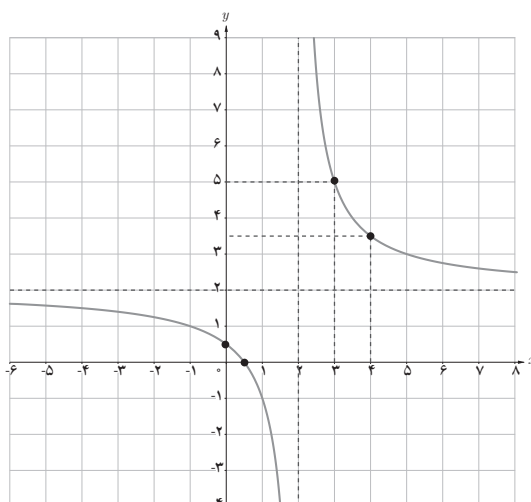
$$f'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6}{(x-2)^3}$$

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$y'$	$-$		$-$
$y''$	$(-)$		$(+)$
$y$	$2$	$+\infty$	$2$

$\searrow$   $-\infty$

نقاط کمکی	$x$	$3$	$4$
	$y$	$5$	$3/5$



$$f(x) = \frac{-x}{x+3} \quad (\text{ث})$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$$

تابع در  $(\circ, \circ)$  محور  $y$  ها را قطع می کند.  $f(\circ) = \circ \rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x}{x+3} = -1$$

بنابراین خط  $y = -1$  مجانب افقی تابع  $f$  می باشد.

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty$$

$\Rightarrow$

خط  $x = -3$  مجانب قائم تابع  $f$  می باشد.

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = \frac{-3}{(x+3)^2}$$

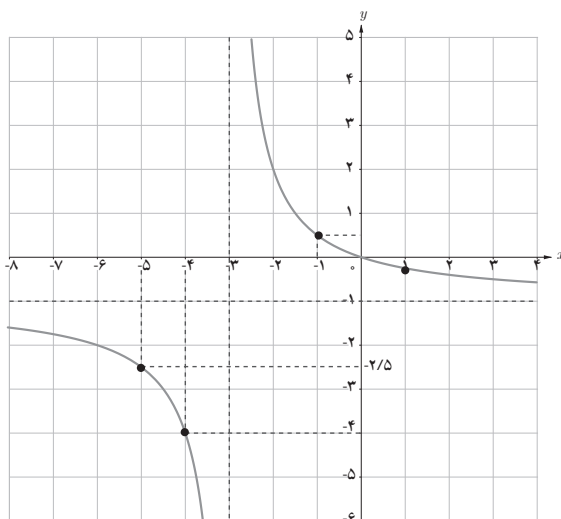
$$f''(x) = \frac{6}{(x+3)^3}$$

$x$	$-\infty$	$-3$	$+\infty$
$y'$	$-$		$-$
$y''$	$(-)$		$(+)$
$y$	$-1 \searrow$	$+\infty \searrow$	$-1 \searrow$

$-\infty$

نقاط کمکی

$x$	$-4$	$-5$	$-1$	$1$
$y$	$-4$	$-2/5$	$0/5$	$-1/4$



ج

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f(0) = 1$$

بنابراین تابع  $f$  در نقطه  $(0, 1)$  محور  $y$  ها را قطع می کند.

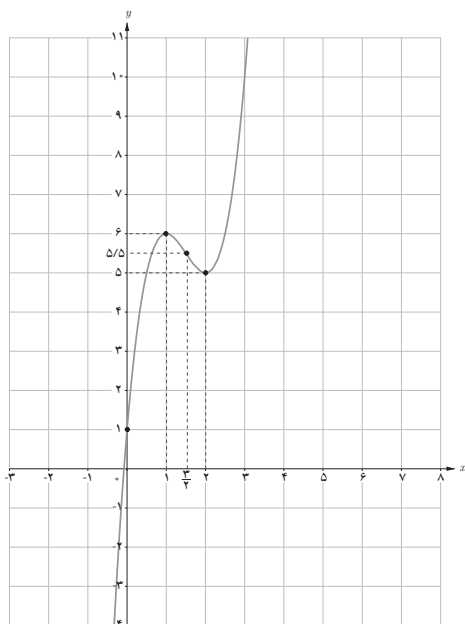
$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

پس نقاط  $(1, 6)$  و  $(2, 5)$  نقاط اکسترمم نسبی  $f$  می باشند.

$$f''(x) = 12x - 18 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

نقطه  $(\frac{3}{2}, \frac{11}{2})$  نقطه عطف تابع  $f$  می باشد.

$x$	$-\infty$	$1$	$\frac{3}{2}$	$2$	$+\infty$
$y'$		+	-	-	+
$y''$		(-)	(-)	(+)	(+)
$y$	$-\infty$	$6$	$\frac{11}{2}$	$5$	$+\infty$





۲ خط  $x=۲$  مجانب قائم و خط  $y=۱$  مجانب افقی تابع  $f$  می باشد بنابراین :

$$-\frac{d}{c} = ۲ \rightarrow c = -\frac{1}{۲}d$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} = ۱ \rightarrow a = c$$

$$f(-۱) = ۰ \Rightarrow \frac{a(-۱)+b}{c(-۱)+d} = ۰ \rightarrow a = b$$

با انتخاب دلخواه  $d=۲$  داریم :  $a = b = c = -۱$  پس

$$f(x) = \frac{-x-۱}{-x+۲}$$

۳ داریم  $f(۰) = -۲$  پس نمودار تابع از نقطه  $(۰, -۲)$  می گذرد.

$$f'(x) = ۳x^۲ + ۱$$

معادله  $f'(x) = ۰$  فاقد جواب می باشد پس تابع دارای اکسترم های نسبی نمی باشد یعنی گزینه های پ و ت رد می شوند.

$$f''(x) = ۶x = ۰ \rightarrow x = ۰$$

نقطه  $x = ۰$  نقطه عطف تابع می باشد بنابراین گزینه الف رد می شود (نقطه عطف گزینه الف نقطه  $x = ۱$  است)

بنابراین گزینه ب صحیح می باشد.

- ۱ استوارت، جیمز، (۲۰۰۲)، حسابگان عام، دیفرانسیل و انتگرال، ترجمه محمدحسین علامت ساز و علی اکبر محمدی حسن آبادی، چاپ اول، تهران، انتشارات آبیژ، ۱۳۸۹.
- ۲ استوارت، جیمز، (۲۰۱۲)، حساب دیفرانسیل و انتگرال، ترجمه ارشک حمیدی، جلد اول، تهران، انتشارات فاطمی، ۱۳۹۵.
- ۳ اصلاح پذیر، بهمن؛ بروجردیان، ناصر؛ ریحانی، ابراهیم؛ طاهری تنجانی، محمدتقی؛ عالمیان، وحید، حسابان (کد کتاب ۲۵۸/۱). تهران: سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، ۱۳۹۵.
- ۴ ایرانمنش، علی؛ جمالی، محسن؛ ربیعی، حمیدرضا؛ ریحانی، ابراهیم؛ شاهورانی، احمد و عالمیان، وحید، ریاضیات ۲ (کد کتاب ۲۳۴/۲). سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، ۱۳۹۴.
- ۵ ایوز، هاوارد و، (۱۹۸۳). آشنایی با تاریخ ریاضیات، ترجمه محمدقاسم وحیدی اصل، تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۸.
- ۶ تورنس، نلسون. (۲۰۰۳)، ریاضیات در عمل، ترجمه فاطمه معصومه راعی، تهران: کانون فرهنگی آموزش، ۱۳۸۴.
- ۷ سافیر، فرد، (۲۰۰۲). ریاضیات سری شومز جلد ۱. ترجمه محمد مازوجی، تهران: کانون فرهنگی آموزش، ۱۳۸۴.
- ۸ سیلورمن، ریچارد، (۱۹۶۹)، حساب دیفرانسیل و انتگرال، ترجمه علی اکبر عالمزاده، جلد اول، تهران انتشارات علمی و فنی، ۱۳۹۰.

- ۹ Adams, R. A. Essex, C. (2010) Calculus: A Complete Course. Toronto. Onario: Pearson Education, Inc.
- ۱۰ Barnett, R. Ziegler, M. Byleen, K. and Sobecki, D. (2008). College Algebra with Trigonometry (g<sup>th</sup> Edition). Mc Graw – Hill Education.
- ۱۱ Beecher, J. A. Penna, J. A. & Bittinger, M. L. (2012). Precalculus. A Right Triangle Approach (4<sup>th</sup> Edition). Boston, MA. Pearson Education, Inc.
- ۱۲ Crauder, B. Evans, B. & Noell, A. (2008). Functions and change, a modeling approach to college algebra and trigonometry. Boston. AM. Houghton Mifflin.
- ۱۳ Hungerford, T. W. Shaw, D. J. (2008). Contemporary Precalculus: A Graphing approach. (5<sup>th</sup> Edition). Belmont, CA. Thomson Brooks/Cole.
- ۱۴ Larson, R. Hostetler, R. P. Edwards, B. H. (2004). College algebra. a graphing approach. New Jersey. Brooks Cole.
- ۱۵ Rockswold, K. (2011) Essentials of College Algebra with Modeling and Visualization (4th Edition) Boston, MA. Pearson Education, Inc.
- ۱۶ Sullivan, M. (2008). Algebra and Trigonometry. New Jersey. Pearson Education. Inc.
- ۱۷ Sullivan, M. (2012). Precalculus (9th Edition). Boston, MA. Pearson Education, Inc.
- ۱۸ Sullivan, M. Sullivan III, M. (2015). Precalculus Concepts Through Functions, A Unit Circle Approach to Trigonometry (3<sup>th</sup> Edition). Upper Saddle River, New Jersey. Pearson Education, Inc
- ۱۹ Swokowski, E. W. Cole, J. A. (2009). Cole–algebra and Trigonometry with Analytic Geometry, Classic 12th Edition. New Jersey. Brooks Cole.
- ۲۰ Swokowski, E. W. Cole, J. A. (2012). Precalculus, functions and graphs. Belmont, CA. Cengage Learning.